NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Øyvind Borck

Tilgjengelig på telefon 408 59 107 mellom kl. 11.00 og 13.00

Eksamen TFY4230: Statistisk fysikk

Lørdag 21. august 2010
kl. 09.00–13.00

Oppgavesettet består av tre oppgaver på tre sider.

Tillatte hjelpemidler: C.
Godkjent, enkel kalkulator
K. Rottmann: Matematisk formelsamling
K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Alle delspørsmål teller likt. Les oppgavene nøye. Lykke til!

Oppgave 1

Toatomige molekyler, som for eksempel CO, kan vibrere langs aksen. Vi skal først beskrive molekylet som en klassisk, endimensjonal harmonisk oscillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

a) Beregn partisjonsfunksjonen Z.

b) Beregn midlere energi $\langle E \rangle$ og varmekapasitet C_{V} for den harmoniske oscillatoren.

c) Midlere energi (og dermed varmekapasiteten) kunne du funnet ved hjelp av ekvipartisjonsprinsippet. Forklar.

Vi skal nå beskrive det toatomige molekylet kvantemekanisk. Energiegenverdiene til en endimensjonal harmonisk oscillator er:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Egenverdiene er ikke degenererte.

d) Beregn partisjonsfunksjonen Z.

e) Beregn midlere energi $\langle E \rangle$ og varmekapasitet C_{V}.

f) Finn lavtemperaturgrensa for $\langle E \rangle$ og C_{V}.

g) Finn høytemperaturgrensa for $\langle E \rangle$ og C_{V}.

h) Lag to plot (skisser!) som viser $\langle E \rangle$ og C_{V} som funksjon av T og sammenlign oppførselen til den klassiske og kvantemekaniske oscillatoren.

i) Hva menes med utfrysing av frihetsgrader?

Oppgave 2
En kjede med tre Isingspinn har Hamiltonfunksjon:

$$H = -J(s_1 s_2 - s_2 s_3)$$

hvor J er en *positiv* konstant.

a) Skriv ned alle konfigurasjonene og de tilhørende energiene.

b) Vis at partisjonsfunksjonen kan skrives som

$$Z = 8\cosh^2(\beta J)$$

c) Regn ut midlere energi $\langle E \rangle$. Finn $\langle E \rangle$ i grensen $T \to 0$ og tolk resultatet.

d) Regn ut korrelasjonsfunksjonen $\langle s_1 s_3 \rangle$. Ta grensen $T \to 0$ og tolk resultatet.

Oppgave 3
I denne oppgaven skal vi studere en ideell Bosegass i d dimensjoner. Partikkeltettheten ρ er gitt ved

$$\rho = C_d \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

der C_d er en dimensjonsavhengig størrelse.

a) Hvilken begrensing gjelder på verdiene det kjemiske potensialet μ kan ta? Begrunn.

Restriksjonen på μ impliserer en maksimal partikkeltetthet ρ_{maks}.

b) Vis at

$$\rho_{\text{maks}} = C_d (kT)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)$$

der $\Gamma(s)$ er Gammafunksjonen og $\zeta(s)$ er Riemanns zetafunksjon. Den kritiske temperaturen T_c for Bose-Einstein-kondensasjon er den laveste temperaturen hvor partikkeltettheten er lik ρ_{maks}.

c) Finn T_c.

d) I hvilke dimensjoner er $T_c \neq 0$, det vil si, i hvilke dimensjoner kan en ha Bose-Einstein-kondensasjon?

Oppgitt:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{s-1}\, \mathrm{e}^{-t}, \qquad s > 0$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1$$