NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i TFY4230 STATISTISK FYSIKK

Onsdag 21. desember, 2011
15:00–19:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

- Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).
- Ett A4 formelark; egne notater er tillatt på dette.
- K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
- Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

There is also an english version of this exam set.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. Kvalitative forklaringer

Gi kortfattede forklaringer på emnene under

a) Sentralgrenseteoremet (central limit theorem).

b) Ergodehypotesen (ergodic hypothesis).

c) Ekvipartisjonsprinsippet (equipartition theorem).

d) Klassisk diamagnetisme (classical diamagnetism).

e) Termisk de Broglie bølgelengde.

Oppgave 2. Python kode

Listing 1: Python kodesnutt

```
nPoints = 50000
nBins = 1000
qValues = numpy.linspace(0, 0.5*numpy.pi, nPoints)[1:nPoints]
omega = numpy.sqrt( 4*numpy.sin(qValues)**2 + 2*numpy.sin(2*qValues)**2)
[weights, bins] = numpy.histogram(omega, bins=nBins)
normalizedWeights = weights/numpy.sum(weights)
```

a) Forklar hva de seks linjene med Python kode over gjør.

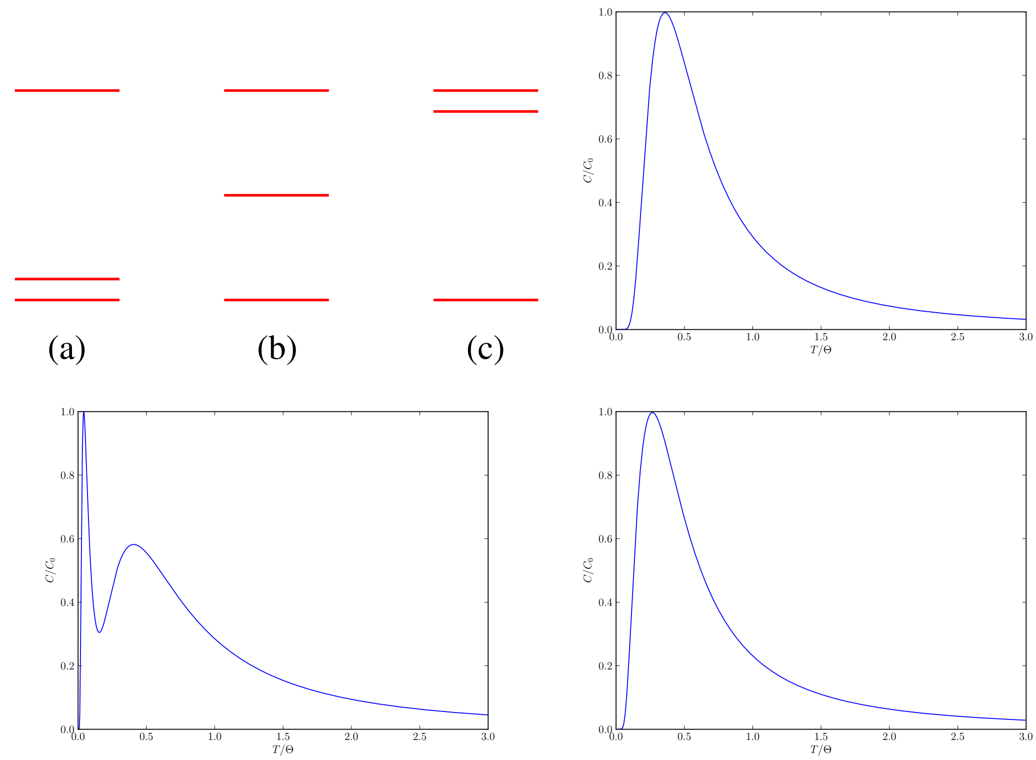
Oppgave 3. Statistisk mekanikk for 3-nivå systemer

Se på et system som kan være i tre forskjellige energitilstander, $\{E_0, E_1, E_2\}$, i termisk likevekt med et reservoir med temperatur T.

a) Skriv ned partisjonsfunksjonen for dette systemet.

b) Regn ut den indre energien til dette systemet.

c) Regn ut entropien til dette systemet.



I figuren øverst til venstre vises tre mulige ordninger av energinivåene. De tre andre figurene viser de tilsvarende varmekapasitetene, men i tilfeldig rekkefølge. Temperaturskalaen Θ er den samme i alle tre tilfellene (C_0 er ikke det).

d) Hvilke varmekapasiteter svarer til hvilke nivåordninger? Forklar dine valg.

Oppgave 4. Ideell bose gass

Den store kanoniske partisjonsfunksjonen for en ideell gass av ikke-relativistiske spinn-0 bosoner i et volum $V = L^3$ er

$$\Xi = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(1 - \mathrm{e}^{\beta(\mu - E_{\boldsymbol{k}})}\right)^{-1}, \quad \text{der } E_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}. \tag{1}$$

Med periodiske grensebetingelser er de tillatte verdiene for $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$ med $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, og tilsvarende for k_y og k_z. Anta grensen der V er stor, slik at summasjoner over $\boldsymbol{k}$ kan erstattes med integraler.

a) Regn ut trykket βPV for denne gassen til andre orden i parameteren $z \equiv \mathrm{e}^{\beta\mu}$.

b) Regn ut midlere partikkeltall $\langle N \rangle$ for denne gassen til andre orden i parameteren z.

c) Regn ut fluktuasjonene i partikkeltall, $\mathrm{Var}\, N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$, til andre orden i parameteren z.

d) Regn ut indre energi, $U = \langle E \rangle$, til andre orden i parameteren z.

e) Regn ut varmekapasiteten ved konstant volum, C_V, til andre orden i parameteren z.

f) Bruk resultatet ditt fra punkt **b)** til å uttrykke z ved partikkeltettheten,

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V}, \tag{2}$$

til andre orden i parameteren ρ.

NTNU **Institutt for fysikk**

Contact during the exam:
Professor Kåre Olaussen
Telephone: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Exam in TFY4230 STATISTICAL PHYSICS

Wednesday december 21, 2011
15:00–19:00

Allowed help: Alternativ **C**

Standard calculator (according to list prepared by NTNU).
One A4 formula sheet; personal notes are allowed on this.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (all languages).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*.

Det er også en norsk versjon av dette eksamenssettet.

This problemset consists of 3 pages.

Problem 1. Qualitative explanations

Explain the following topics briefly

a) Central limit theorem.

b) Ergodic hypothesis.

c) Equipartition theorem.

d) Classical diamagnetism.

e) Thermal de Broglie wavelength.

Problem 2. Python code

Listing 1: Python code fragment

```
nPoints = 50000
nBins = 1000
qValues = numpy.linspace(0, 0.5*numpy.pi, nPoints)[1:nPoints]
omega = numpy.sqrt( 4*numpy.sin(qValues)**2 + 2*numpy.sin(2*qValues)**2)
[weights, bins] = numpy.histogram(omega, bins=nBins)
normalizedWeights = weights/numpy.sum(weights)
```

a) Explain what is done by the six lines of Python code above.

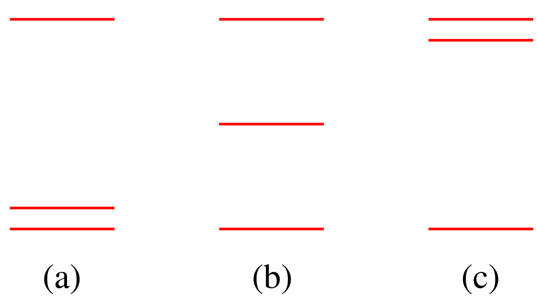
Problem 3. Statistical mechanics of 3-level systems

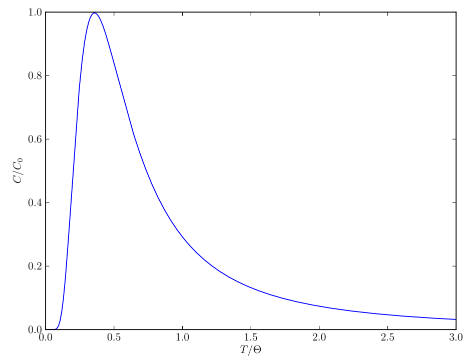
Consider a system which can be in three different energy states, $\{E_0, E_1, E_2\}$, in thermal equilibrium with a reservoir at temperature T.

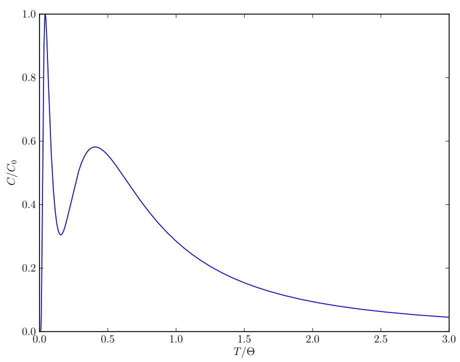
a) Write down the partition function for this system.

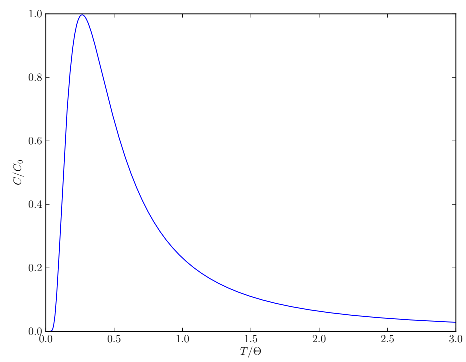
b) Calculate the internal energy of this system.

c) Calculate the entropy of this system.









In the upper left figure above three possible orderings of the energy levels are listed. The three other figures show the corresponding heat capacities in random order. The temperature scale Θ is the same in all three cases (but C_0 is not).

d) Which heat capacity correspond to which level ordering? Explain your choices.

Problem 4. Ideal bose gas

The grand partition function of an ideal gas of nonrelativistic spin-0 bosons in a volume $V = L^3$ is

$$\Xi = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(1 - \mathrm{e}^{\beta(\mu - E_{\boldsymbol{k}})}\right)^{-1}, \quad \text{where } E_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}. \tag{1}$$

With periodic boundary conditions the allowed values for $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$ with $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, and similar for k_y and k_z. Assume the limit of large V, so that summations over $\boldsymbol{k}$ can be replaced by integrals.

a) Calculate the pressure βPV of this gas to second order in the parameter $z \equiv \mathrm{e}^{\beta\mu}$.

b) Calculate the mean particle number $\langle N \rangle$ of this gas to second order in the parameter z.

c) Calculate the fluctuations in particle number, $\mathrm{Var}\, N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$, to second order in the parameter z.

d) Calculate the internal energy, $U = \langle E \rangle$, to second order in the parameter z.

e) Calculate the heat capacity at constant volume, C_V, to second order in the parameter z.

f) Use your result from point **b)** to express z in terms of the particle density,

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V}, \tag{2}$$

up to second order in ρ.