NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i TFY4230 STATISTISK FYSIKK

Mandag 12. august, 2013
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

- Standard kalkulator (i henhold til NTNU's liste).
- Ett A4 formelark; personlige håndskrevne notater er tillatt på dette.
- K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
- Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*.

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Ideell gass av relativistiske partikler

I denne oppgaven skal du først se på et system av N identiske masseløse ikke-vekselvirkende partikler i et volum V. Hamilton-funksjonen for dette systemet er

$$H = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} |\boldsymbol{p}_n c| & \text{når alle } N \text{ partiklene er i volumet } V, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Vi antar at tettheten $\rho = N/V$ er så lav at systemet kan betraktes som klassisk.

a) *Skriv ned* den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N for dette systemet ved temperaturen T.

b) Regn ut den kanoniske partisjonsfunksjonen Z_N for dette systemet ved temperaturen T.

c) Finn tilstandsligningen $P = P(N, V, T)$ for dette systemet.

d) Finn den indre energien $E = \langle H \rangle$ til dette systemet.

e) Finn Helmholtz fri energi $F = E - TS$ til dette systemet.

f) Finn varmekapasiteten C_V (ved konstant volum) til dette systemet.

g) Finn entropien S til dette systemet.

h) Finn det kjemiske potensialet μ til dette systemet.

i) Hva er den termiske de Broglie bølgelengden til disse partiklene?

j) Omtrent ved hvilken tetthet vil du anta at kvantemekaniske effekter begynner å blir av betydning for dette systemet?

Oppgave 2. Bosoner i et harmonisk potensial

I denne oppgaven skal du studere en samling termiske bosoner som er fanget i et harmonisk potensial. For å forenkle regningen antar skal vi anta et endimensjonalt system. Énpartikkel-tilstandende er da gitt som løsninger av Schrödninger-ligningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}Kx^2\right)\psi_n(x)=E_n\psi_n(x), \tag{2}$$

med enpartikkel-egenenergier $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$, der $\omega=\sqrt{K/M}$, og $n=0,1,\ldots$.

a) *Skriv ned* den store kanoniske partisjonsfunksjonen Ξ for dette systemet ved temperatur T (bruk variabelen $\beta=1/(k_BT)$), og kjemisk potensial μ.

b) Innfør *fugasiteten* $z=\mathrm{e}^{\beta\mu}$, og regn ut $\log\Xi$ som en potensrekke i z.

c) Regn ut det midlere partikkeltallet $N=\sum_{n=0}^{\infty}\langle N_n\rangle$ som en potensrekke i z, der $\langle N_n\rangle_n$ er det midlere antall partikler i énpartikkel-tilstanden n.

d) Regn ut den midlere eksitasjonsenergien $\bar{E}=\sum_{n=0}^{\infty}\langle E_n\rangle$ som en potensrekke i z, der $\langle E_n\rangle=n\hbar\omega\langle N_n\rangle$ er den midlere eksitasjonsenergien til partiklene i énpartikkel-tilstanden n.

e) Bruk resultatene fra de to foregående punktene til å finne E som funksjon av N til annen orden i N, dvs. bestem koeffisientene C_1 og C_2 i utviklingen

$$E=C_1\,N+C_2\,N^2+\ldots. \tag{3}$$

Anta nå istedet at $\beta\hbar\omega\gg 1$, slik at man kan gjøre tilnærmingen

$$\sinh\tfrac{1}{2}\beta\hbar\omega\approx\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}. \tag{4}$$

f) Regn ut Ξ med denne tilnærmingen.

g) Regn ut det midlere partikkeltallet N med denne tilnærmingen.

h) Regn ut den midlere energien E med denne tilnærmingen.

Oppgave 3. Python kode

Listing 1: Python code fragments

```python
def make1DRandomWalkByTossingCoins(nsteps):
# Generate a one-dimensional random walk of length 'nsteps' by throwing (virtual) coins
    randomSteps = numpy.random.randint(0, 2, nsteps)
    randomWalk  = numpy.cumsum(randomSteps-0.5)
    return randomWalk

def plot1DRandomWalk(randomWalk):
# Plot a one-dimensional random walk as function of discrete time
    pyplot.plot(randomWalk, 'ob')
    pyplot.xlabel(r'Discrete␣time␣$n$')
    pyplot.ylabel(r'Discrete␣position␣$X(n)$')
    pyplot.title(r'A␣1-dimensional␣random␣walk')
# pyplot.show()
    pyplot.savefig("random1DWalk")
```

a) Forklar hva som blir gjort i de to Python funksjonene listet over.

b) Hvordan vil du ekstrahere endepunktet til `randomWalk`?

c) Hvordan vil du ekstrahere det største avviket fra startverdien i `randomWalk`?