Ex: Statistisk Mekanikk høst 1976 facit 14/12-76 (1)

1 Lukket system i likevekt, E, N og ytre parametre faste

2 system i varmekontakt m. omgivelser: $U=\bar{E}$ og N faste ∴ $T=$ konst (termostat)

3 " i varme og partikkelkontakt -"- $U=\bar{E}$ og $\bar{N}$ " ∴ T og μ konstante

4: Liouvilles setn. ⇒ fasesannsynlighet for likevekt $\rho(q\,p) = \rho(E)$.

Ved sammenfatning av tilm. nært. delsystemer: $E_{1+2} = E_1 + E_2 +$ negl $O(N^{2/3})$ er energien additiv men fasesannsynligheten multiplikativ: $\rho_{1+2} = \rho_1\rho_2 +$ negl. Allerede dette er i og for seg nok til at vi må forlange den kanoniske fordelingslov oppfyldt. Dessuten kan det vises at entropien som funksjonal av ρ over faserommet Ω, må ha formen $S[\rho] = -$ konstant $\int \log\rho \; \rho \, d\Omega$ ∴

5. $S_B = k \log \Omega(\Delta E)$. $\Omega(\Delta E) = \Delta E \cdot \frac{d}{dE}\int_0^E (dp\,dq)^f$ (til 1. orden i ΔE)

$\Omega(\Delta E) = \omega(E)\,\Delta E$. $\omega(E) \sim V^N \cdot E^{\alpha N}$ $\alpha = O(1)$ $\alpha = \frac{3N}{2}$ for id. gas.

Gibbs: $\int e^{\frac{\psi - E}{\theta}} d\Omega = 1 = \int e^{\frac{\psi-E}{\theta}}\omega(E)\,dE = e^{\frac{\psi-\bar{E}}{\theta}}\cdot\omega(\bar{E})\cdot\delta E$

$e^{\frac{\psi-\bar{E}}{\theta}} = e^{-S/k} \Rightarrow S_{Gibbs} = -k\log\omega(\bar{E}) - k\log\delta E$.

Leddene δE og ΔE må være av mindre orden enn E og $\bar{E}$ som er $\sim N$, $\log\omega(\bar{E})$ og $\log\omega(E)$ er $\sim N$. Vi begår en feil $o\left(\frac{\log N}{N}\right)$ ved å neglisjere leddene δE og ΔE. ("o" = av mindre orden enn) Videre kan den sannsynligste energi E', om vi identifiserer den med E i det mikrokan. ens., bare differere med et ledd $O(N^{1/2})$ fra $\bar{E}$. Altså ingen betydning i termodynamikken, hvilket ensemble som brukes.

6 $\overline{v^2} = 3\,RT/M$ ∴ $\bar{v} \sim (\overline{v^2})^{1/2} \sim \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ (precis: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}$)

midlere molvekt luft $M = 29\,g$.

$\bar{v} = \left(\frac{8}{\pi}\cdot\frac{8{,}3\cdot 293\cdot 10^7}{29}\right)^{1/2} = 4{,}7\cdot 10^4$ cm/sek ∴ ~ 500 m/sek.

7 Doppler effekt: $\nu = \nu_0(1 \pm \frac{v}{c}\cos\vartheta)$, $\Delta\nu = \pm\nu_0\frac{v}{c}$

Maxwells hastighetsfordeling $w(v) \to w\left(\frac{c}{\nu}\Delta\nu\right)\frac{dv}{d\nu}$ gir linjeformen.

Man kan spørre om det er riktigst å forbinde Dopplerbredden med $\bar{v}$, $(\overline{v^2})^{1/2}$ eller med $\overline{v\cos\vartheta}$ i overslaget:

1) $\bar{v} = \left(\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$; 2) $(\overline{v^2})^{1/2} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$ 3) $\overline{v\cos\vartheta} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$

Da lyset er kollimert fra et vidt vinkelområde synes 1) å være det riktigste. Men 2) er det mest konvensjonelle og det som brukes i spektroskopien. Da saken kan diskuteres og ~~bør~~ alle alternativer kommenteres litt i besvarelsen. Jeg velger

$$\left(\Delta \nu/c\right)_{termisk} = \frac{\nu}{c^2}\left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{3kT}{mc^2}\right)^{1/2}$$

Dette får høist være = 1/2 × oppspaltningen.

$$\therefore \quad \frac{\nu}{c}\left(\frac{3kT}{mc^2}\right)^{1/2} < \frac{1}{2}\cdot\Delta(1/\lambda)$$

$$T < \frac{mc^2}{3k}\cdot\frac{1}{2^2}\left[\lambda\,\Delta(1/\lambda)\right]^2 \qquad \lambda \approx 4\cdot 10^{-5}\ \text{cm}, \quad \Delta(1/\lambda) \sim 0{,}3\ \text{cm}^{-1}$$

$$= \frac{1{,}67\cdot 10^{-24}\cdot 9\cdot 10^{20}}{3\cdot 1{,}39\cdot 10^{-16}}\cdot\frac{1}{4}\left[1{,}2\cdot 10^{-5}\right]^2$$

$$= \frac{1{,}67\cdot 9\cdot 1{,}44}{3\cdot 1{,}39\cdot 4}\cdot 10^{-24+20+16-10}$$

$$1{,}3 \quad \cdot 10^{2}$$

$\underline{\underline{T \lesssim 130^\circ\ K}}$ ∴ Flytende lufttemperaturer (Pasadena)

*

8 I kv. mek. kan vi ikke bruke fase-rommet som sannsynlighetsfelt. Men vi kan vel spørre efter sannsynligheten for å finne systemet i en best. "tilstand" Ψ. Bare et ensemble av stasjonære tilstander: $\Psi = |E\rangle$ kan fremstille likevekt. Den efterspurte sannsynlighet (E, E-elementet av $\rho = |E\rangle w(E) \langle E|$ men jeg forlanger ikke gjengivelse av dette) er $w(E)$

Som før må $w_{1+2} = w_1 \cdot w_2$ $\quad E_{1+2} = E_1 + E_2$. Og $S = -k \sum_E w \log w$ gjør $S = \max.$ m. h. t. $\sum w = 1$ og $\sum w(E) \cdot E = U$ fast. må

$$\underline{w(E) = C \cdot e^{-\beta E}}$$

9 Harmonisk oscillator: $\varepsilon_\nu = \text{konst} + n h\nu$, $n = 0, 1 \cdots \infty$

Hver egensvingning: $e^\lambda_{\underline{k}} \cdot e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$ er tilordnet en sådan.

Der er $\sum_{\lambda=1}^{2} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\underline{k} = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$ av dem $\subset [\nu, \nu + d\nu]$

Sannsynligheten for å finne én av dem (ν) exitert med n (egte n_ν) kvanta er $w(n) = C e^{-\beta h\nu \cdot n}$ hvor $C = 1 / \sum e^{-\beta h\nu \cdot n} = \underline{1 - e^{-\beta h\nu}}$ ved temperaturlikevekt. ($\beta = 1/kT$)

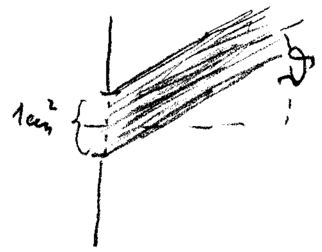
På vanlig måte finnes da oscillatorens midlere energi (også $= h\nu \otimes$ det midlere besetningstall) $\bar{\varepsilon} = h\nu / (e^{\beta h\nu} - 1)$ og derav Plancks:

$$\underline{dU_\nu = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu}$$

10 $$\frac{U}{V} = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{1}{h^3} \cdot \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{8\pi}{(hc)^3} (kT)^4 \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot 6 = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

Hjelpesetning:



Hvis strålingen hadde vært exakt kollimert i retningen ϑ så ville intensiteten vært $c \cdot \frac{u}{V}$. Men energien er isotropt fordelt over alle retninger. altså bare $\frac{c}{4\pi}\frac{u}{V}$ i denne retning.

Pr tidsenhet og flateenhet av et hull i en glødende ovn: $I = \frac{c}{4\pi}\frac{u}{V}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{c}{4}\frac{u}{V} = \frac{c}{4}\frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 h^3 c^3}$

Herav Stefans konstant; $I = \sigma T^4$:

$$\underline{\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2}$$

11 $\quad \frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{h^3 c^2} = \frac{2}{15}\cdot \pi^5 \frac{(1,38\cdot 10^{-16})^4}{(6,62\cdot 3\cdot 10^{-17})^3}\cdot 3\cdot 10^{10}$

$$= 5,75\cdot 10^{-5}\ \mathrm{erg/cm^2}$$

$$= 5,75\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Watt/cm^2}$$

Setter romtemperatur $\approx 273\,^\circ K$

$$I = 5,75\cdot(2,73)^4\cdot(10^2)^4\cdot 10^{-8} \approx \underline{300}\ \mathrm{Watt/m^2}$$