Oppgave 1. Løysing

a) Hamiltonfunksjonen for systemet er

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + mgz_i \right) = \sum_{i=1}^{N} H_i$$

Sannsynlighetsfordelinga er

$$\rho = c\, e^{\beta(F-H)} = c_0\, e^{-\beta H},$$

der vi har sett $c_0 = c\, e^{-\beta F}$.

Den søkte fordelinga for partikkel nr. 1, er:

$$\underline{\underline{P(\vec{r}_1, \vec{p}_1)}} = \int \rho\, d^3r_2 \cdots d^3r_N \cdot d^3p_2 \cdots d^3p_N$$

$$= e^{-\beta H_1}\, c_0 \int e^{-\sum_{i=2}^{N} H_i}\, d^3r_2 \cdots d^3r_N\, d^3p_2 \cdots d^3p_N$$

$$= C_1\, e^{-\beta H_1} = \underline{\underline{C_1\, e^{-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + mgz_1\right)}}}$$

b)

Vi har

$$P(\vec{p}_1)\, d^3p_1 = d^3p_1 \cdot \int P(\vec{r}_1, \vec{p}_1)\, d^3r_1$$

$$= C_2'\, e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m}}\, d^3p_1 = C_2'\, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2} \cdot m^3\, d^3v_1$$

$$= C_2 \, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2} \, d^3 v_1 = P(\vec{v}_1) \, d^3 v_1$$

Allora' è

$$\underline{\underline{P(\vec{v}_1)}} = \underline{\underline{C_2 \, e^{-\beta \frac{1}{2} m v_1^2}}}$$

c)

$$\underline{\underline{P(z_1)}} = \int P(\vec{r}_1, \vec{p}_1) \, d^3 p_1 \, dx_1 \, dy_1$$

$$= \underline{\underline{C_3 \cdot e^{-\beta m g z_1}}}$$

Vi ma' ha

$$\int_0^h P(z_1) \, dz_1 = C_3 \int_0^h e^{-\beta m g z_1} \, dz_1$$

$$= C_3 \cdot \frac{1 - e^{-\beta m g h}}{\beta m g} = 1$$

Dalle qui

$$\underline{\underline{C_3}} = \underline{\underline{\frac{\beta m g}{1 - e^{-\beta m g h}}}}$$

Oppgåve 2. Løysing.

Sannsynlighetsfordelingane for dei to konfigurasjonane er

$$\rho_1 = e^{\beta F} \frac{1}{h^3} e^{-\beta \frac{p^2}{2M}}$$

og

$$\rho_2 = e^{\beta F} \frac{1}{h^6} e^{-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} + u\right)}$$

Her er F Helmholtz fri energi for systemet. F er bestemt av normeringskravet:

$$\int \rho_1 d^3r\, d^3p + \int \rho_2\, d^3r_1\, d^3r_2\, d^3p_1\, d^3p_2 = 1$$

a)

Sannsynligheten for at systemet skal vera i konfigurasjonen 1 og i elementet $d^3r\, d^3p$ er då lik $\rho_1 d^3r\, d^3p$. Sannsynligheten for at systemet skal vera i konfigurasjonen 1 finn vi nå ved å integrera ut $\vec{r}$ og $\vec{p}$ koordinatane.

Altså:

$$\underline{\underline{P_u}} = \int \rho_1 d^3r\, d^3p = \int \rho_1 dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$
$$\underline{\underline{= C\,\frac{1}{h^3}\,V\,(2\pi M kT)^{3/2}}}$$

der er $C = \exp(\beta F)$.

b). Tilsvarande får vi

$$\underline{\underline{P_d}} = \int \rho_2\, d^3r_1\, d^3r_2\, d^3p_1\, d^3p_2$$
$$\underline{\underline{= C\,\frac{1}{h^6}\,V^2 (2\pi m kT)^{3/2} (2\pi M kT)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\mu}{kT}}}}$$

Det følgjer

$$\underline{\underline{\alpha}} = \frac{P_u}{P_d} = \underline{\underline{\frac{h^3 e^{\frac{\mu}{kT}}}{(2\pi m kT)^{3/2} \cdot V}}} \qquad (1)$$

c)

Når V er liten og $\mu/kT \gg 1$, er eksponensialfaktoren dominerande, slik at $\alpha \gg 1$. Det følgjer at atomet er udissosiert d)

Når $V \rightarrow \infty$ vil, for endeleg ukT, $\alpha \rightarrow 0$. Det følgjer at atomet då er dissosiert.

Dersom sannsynligheten per tidsintervall for rekombinasjon av ionet og elektronet er vesentleg mindre enn sannsynligheten per tidsintervall for ionisasjon, vil atomet stort sett vera dissosiert. Ionisasjonen skjer ved kollisjon med veggene, der atomet har ein viss sannsynlighet for å dissosiera.
Føresetnaden for at ionet og elektronet skal rekombinera er mellom anna at dei kjem nær nok kvarandre. Dersom volumet er stort nok vil elektronet og ionet ha liten sannsynlighet for å møtast. Atomet vil difor bli i sin dissosierte tilstand.

e)

Formelen (1) for d gjeld for ein partikkel i eit volum V. Kvalitativt bør vi kunna gjera bruk av (1) også for fleire partiklar i den forstand at forholdet mellom udissosierte og dissosierte partiklar minkar med aukande T og aukande volum per partikkel (mindre tettheit).

I koronaen er tettheiten og temperaturen begge relativt små. Desse faktorane trekker då i kvar sin retning, men reduksjonen i tettheiten mest. Difor blir det relativt fleire dissosierte partiklar i koronaen enn i dei indre delar av sola.

Oppgåve 3. Løysing

a)

$$\underline{\quad n_2 = N - n_1 \quad} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon$$

$$\underline{\quad n_1 \quad} \quad \varepsilon_1 = 0$$

La oss anta at det er n_1 partiklar i grunntilstanden. Då må det vera $n_2 = N - n_1$ partiklar i den eksiterte tilstanden.

Energien til systemet er

$$E_n = n_2 \varepsilon = (N - n_1)\varepsilon = E_{n_1}$$

Partisjonsfunksjonen er

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{n_1=0}^{N} e^{-\beta (N-n_1)\varepsilon}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} q^{N-n_1}$$

Vi set $m = N - n_1$, og får

$$Z = \sum_{m=0}^{N} q^m = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Dette gir

$$\underline{\underline{p(m_1)}} = \frac{e^{-\beta(N-m_1)}}{Z} = \underline{\underline{\frac{q^{(N-m_1)}\cdot(1-q)}{1-q^{N+1}}}}$$

b) Det middels besettelsestalet er

$$\langle m_1\rangle = \sum_{m_1=0}^{N} p(m_1)\cdot m_1 = \sum_{m_1=0}^{N} \frac{q^{N-m_1}\cdot(1-q)\cdot m_1}{1-q^{N+1}}$$

$$= \frac{1-q}{1-q^{N+1}} \sum_{m_1=0}^{N} m_1 q^{N-m_1} = Z^{-1} \sum_{m=0}^{N} (N-m) q^m$$

$$= Z^{-1}\left(N Z - \sum_{m=0}^{N} m q^m\right) \qquad (1)$$

Siste leddet i parantesen kan vi skriva

$$\sum_{m=0}^{N} m q^m = \sum_{m=0}^{N} \left[(m+1) q^m - q^m\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \sum_{m=0}^{N} q^{m+1} - \sum_{m=0}^{N} q^m$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} q - \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$= q\,\frac{1-q^{N+1}}{(1-q)^2} - \frac{(N+1)\,q^{N+1}}{1-q}$$

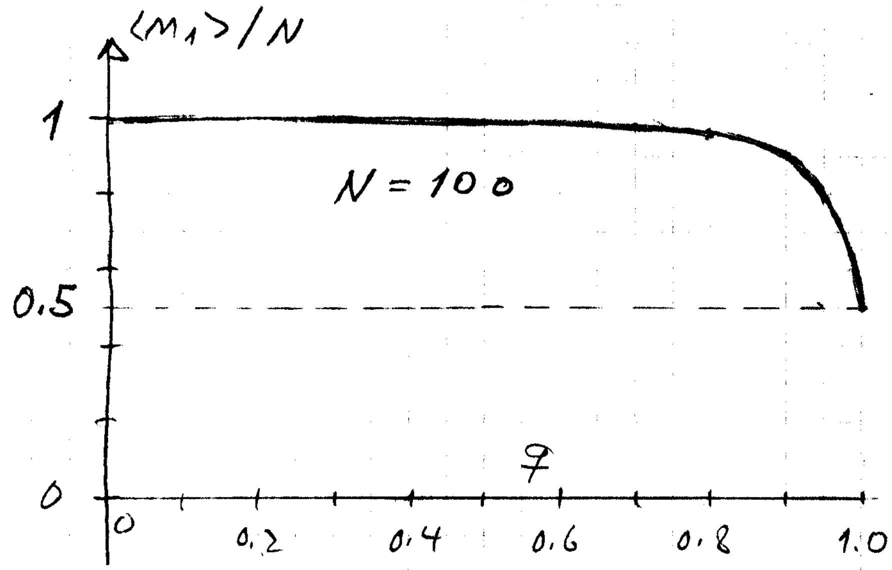
Innsatt i (1) får vi så

$$\underline{\underline{\langle m_1\rangle}} = \underline{\underline{N - \frac{q}{1-q} + (N+1)\frac{q^{N+1}}{1-q^{N+1}}}} \qquad (3)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{1-q} + \frac{N+1}{1-q^{N+1}}}} = \frac{q^{N+1} + N - Nq - q}{(1-q)(1-q^{N+1})}$$

c)

$$\frac{\langle m_1\rangle}{N} = 1 - \frac{1}{N}\frac{q}{1-q} + \frac{N+1}{N}\frac{q^{N+1}}{1-q^{N+1}}$$



d) Vi har

$$\underline{\underline{U}} = \langle m_2\rangle \varepsilon = \underline{\underline{(N - \langle m_1\rangle)\,\varepsilon}} \qquad (4)$$

Vi set nå $N = 1$ i (3) og finn

$$\langle m_1\rangle = \frac{1}{1+q}$$

Likning (4) gir:

$$U = \left(1 - \frac{1}{1+q}\right)\varepsilon = \varepsilon \frac{q}{1+q} = \varepsilon \cdot \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}}$$

Då er

$$\underline{\underline{C_V}} = \frac{\partial U}{\partial T} = \underline{\underline{k\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{(1+e^{-\varepsilon/kT})^2}}}$$