92760 Oppgave 2a. Løsning (antydet)

Konfigurasjonsintegralet:

$$Q = \int \prod_i dq_i \, e^{-\Phi/kT} = \int d^3 r_1 \ldots d^3 r_N \, e^{-U(\vec r_1 \ldots \vec r_N)/kT} = \int_V \ldots \int_V d\vec r_1 \ldots d\vec r_{2N} \, e^{[\beta \sum_{i<j} q_i q_j \ln r_{ij}]}$$

Innfører dimensjonsløse vektorvariable

$$\vec R_i = \frac{\vec r_i}{L}, \quad \vec r_i = L \cdot \vec R_i$$

slik at integrasjonsområdet blir $0 \leq X_i \leq 1$, $0 \leq Y_i \leq 1$

dvs.,

$$Q = L^{4N} \int_0^1 \ldots \int_0^1 dX_1 \, dY_1 \ldots dY_{2N} \, e^{[\beta \sum_{i<j} q_i q_j (\ln L + \ln R_{ij})]},$$

eller $Q = L^{4N} e^{\beta \sum_{i<j} q_i q_j \ln L} \cdot I$

hvor $I = \iint dX_1 \, dY_1 \ldots dY_{2N} \, e^{\beta \sum_{i<j} q_i q_j \ln R_{ij}}$

dvs. I er uavhengig av L eller av $V = L^2$.

Videre:

Nøytralitetskrav: $\sum_{i=1}^{2N} q_i = 0$, dvs.

$$2 \sum_{i<j} q_i q_j = \sum_{i \neq j} q_i q_j = \left(\sum_i q_i\right)\left(\sum_j q_j\right) - \sum_{i=1}^{2N} q_i^2 = -2Nq^2$$

Innsatt gir det

$$\underline{\underline{Q}} = L^{4N} e^{-\beta N q^2 \ln L} \cdot I = L^{4N - \beta N q^2} \cdot I = \underline{\underline{V^{2N - \frac{1}{2}\beta N q^2} \cdot I}}$$

Tilstandsligningen:

$$\frac{p}{kT} = \frac{\partial}{\partial V}(\ln Q) = \frac{2N - \frac{1}{2}\beta N q^2}{V}$$

$$\underline{\underline{p = \left(kT - \tfrac{1}{4}q^2\right)\rho}}, \quad \left(\text{da } \frac{2N}{V} = \rho\right)$$

$p > 0$ hvis $\underline{\underline{T > T_0 = \frac{q^2}{4k}}}$

Oppgave 2b

Integranden Q er produkt av faktorer

$$e^{\beta \sum_{i<j} q_i q_j \ln r_{ij}} = \prod_{i<j} r_{ij}^{\beta q_i q_j},$$

dvs. faktor med $q_i = -q_j$ er singulær for $\vec r_i = \vec r_j$.

Undersøker singulariteten ved å legge origo i $\vec r_i$ og ser på to-dimensjonalt integral over $\vec r_j$ i polarkoordinater:

$I \sim \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} r_j\, d\phi\, r_j^{-\beta q^2} dr_j \sim \int_0^{\varepsilon} r_j^{(1-\beta q^2)} dr_j = \frac{1}{(2-\beta q^2)} \Big|_0^{\varepsilon} r_j^{2-\beta q^2}$,
som er endelig bare hvis $\beta q^2 < 2$, dvs.

$$\underline{T > T_1 = \frac{q^2}{2k} = 2T_0}$$

dvs. tilstandsligningen har mening bare for $T > 2T_0$

Videre: divergens p.g.a. at motsatt ladede partikler slår seg sammen til nøytrale par.

En gass av N ikke-vekselvirkende par er en ideell gass med tilstandsligning $\underline{p = \frac{NkT}{V}}$

Isochoren $V = \text{konst.}$ skjærer da den første tilstandsligningen $p = \frac{(kT - \frac{1}{2}q^2)2N}{V}$ for temperaturen:
$p = 2k(T-T_0)\frac{N}{V} = kT\frac{N}{V}$, dvs. for $\underline{T = 2T_0}$
(Isochorene blir rette linjer)

Oppgave 2c

Setter $\frac{q^2}{r} = q^3 \frac{1}{qr} = \gamma^3 F(\gamma r)$ når $\gamma = q$

Sum av ringdiagram: $R = -\frac{q^3}{16\pi^3}\int d\vec{k}\,[\ln(1-\rho\tilde{v}) + \rho\tilde{v}(k)]$

Innfører hjelpeparameter $e^{-\varepsilon r}$ og tar etterpå $\varepsilon\to 0$:

$$\tilde v(k) = -\beta q^2 \int e^{i\vec k \vec r q}\, \frac{1}{r} e^{-\varepsilon r} d\vec r = -2\pi\beta q^2 \int r\cdot e^{ikrq\cos\theta} e^{-\varepsilon r}\, dr\, d(\cos\theta)$$

$$= -\frac{2\pi\beta q^2}{ikq}\int [e^{-(\varepsilon - ikq)r} - e^{-(\varepsilon+ikq)r}]dr = -\frac{2\pi\beta q}{ik}\left[\frac{1}{\varepsilon - ikq} - \frac{1}{\varepsilon+ikq}\right] = -\frac{4\pi\beta q^2}{k^2q^2+\varepsilon^2}$$

$\lim_{\varepsilon\to0} \tilde v(k) = -\frac{4\pi\beta}{k^2}$, dvs.

$$R = -\frac{q^3}{16\pi^3}\int_0^\infty 4\pi k^2 dk\,[\ln(1+4\pi\beta\rho k^{-2}) - 4\pi\beta\rho k^{-2}]$$

$$= \frac{q^3}{4\pi^2}\int_0^\infty\left[4\pi\beta\rho - k^2\ln\left(1+\frac{4\pi\beta\rho}{k^2}\right)\right]dk = \frac{q^3}{4\pi^2}(4\pi\beta\rho)^{\frac32}\int_0^\infty dy\left[1 - y^2\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right]$$

der $y = \frac{k}{\sqrt{4\pi\beta\rho}}$, $dk = dy\sqrt{4\pi\beta\rho}$

Delvis integrasjon gir ($\int u'v = uv - \int uv'$):

$$I = \int dy\left[1-y^2\ln\left(1+\frac1{y^2}\right)\right] = -\int_0^\infty dy\cdot y\frac{d}{dy}\left[1-y^2\ln\left(1+\frac1{y^2}\right)\right] = 2\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y^2)} - 2I$$

dvs. $I = \frac23\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac23 \Big|_0^\infty \operatorname{arctg} y = \frac23\cdot\frac\pi2 = \frac\pi3$

$$R = \frac{1}{12\pi}(4\pi\beta\rho q^2)^{3/2} = \frac{(4\pi\beta q^2)^{3/2}}{12\pi}\rho^{3/2}$$

$$\frac{(p-p^{ideell})}{kT} = \left(1-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R = \left[\frac{(4\pi\beta q^2)^{3/2}}{12\pi}\right]\left[\rho^{3/2} - \frac32\rho^{3/2}\right] = -\frac{q^3}{3kT}\sqrt{\frac{\pi}{kT}}\,\rho^{3/2}$$

dvs. $\underline{p = kT\rho - \frac{q^3}{3}\sqrt{\frac{\pi}{kT}}\,\rho^{3/2}}$

Oppgaveløsninger:

92760. Oppgave 1a. Antydet løsning

Finner først z som potensrekke i ρ fra Mayers 2. ligning, dvs.

$$z = \rho - 2\bar{b}_2 z^2 - 3\bar{b}_3 z^3 - \dots$$

til ρ: $z = \rho$

til ρ^2: $z = \rho - 2\bar{b}_2\rho^2$

til ρ^3: $z = \rho - 2\bar{b}_2(\rho^2 - 4\bar{b}_2\rho^3) - 3\bar{b}_3\rho^3 = \rho - 2\bar{b}_2\rho^2 + (8\bar{b}_2^2 - 3\bar{b}_3)\rho^3$

Innsatt for z i Mayers 1. ligning:

$$\frac{p}{kT} = z + \bar{b}_2 z^2 + \bar{b}_3 z^3 + \dots = \rho - \bar{b}_2\rho^2 + (4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3)\rho^3$$

dvs.

$$\underline{\underline{B_2 = -\bar{b}_2}}, \qquad \underline{\underline{B_3 = 4\bar{b}_2^2 - 2\bar{b}_3}}.$$

Oppgave 1b

Uttrykker $\bar{b}_l$ diagrammatisk. $l!\,\bar{b}_l$ er sum av alle sammenhengende grafer med l nummererte punkter. En irredusibel graf kan ikke gjøres usammenhengende ved å fjerne ett punkt.

$$b_2 = \frac{1}{2!\,V}\,\circ\!\!-\!\!\circ \;\Rightarrow\; 2!\,\bar{b}_2 = \bullet\!\!-\!\!\bullet \;\Rightarrow\; \bar{b}_2 = \tfrac{1}{2}\,\bullet\!\!-\!\!\bullet$$

$$b_3 = \frac{1}{3!\,V}\left(\triangle + 3\,\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ\right) \;\Rightarrow\; 3!\,\bar{b}_3 = \triangle + 3\,\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet \;\Rightarrow\; \bar{b}_3 = \tfrac{1}{2}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 + \tfrac{1}{6}\,\triangle$$

da $\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet = (\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2$,

dvs. $B_3 = 4\cdot\frac{1}{4}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 - 2\left[\frac{1}{2}(\bullet\!\!-\!\!\bullet)^2 + \frac{1}{6}\,\triangle\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\,\triangle}}$

Oppgave 1c

En graf i den implisitte notasjon står for: ① en faktor $f(r_{ij})$ for ett bånd $i-j$, ② en faktor ρ pr. punkt $\bullet$, ③ en faktor $\frac{1}{s}$, hvor s er symmetritallet, ④ en integrasjon over alle punkter untatt ett.

Grafens symmetritall er antall permutasjoner av merkete grafpunkter som gir samme graf. Osv.!

Symmetritall: $s = 2$ for 

$s = 6$ for 

92760. Oppgave 3a. Løsning (antydet)

Antar at $\mathcal{H}$ kan Taylor-utvikles i t og M:

$$\mathcal{H} = a(T)M + b(T)M^3 + \dots \qquad \mathcal{H}(-M) = -\mathcal{H}(M)$$

Invers susceptibilitet for $\mathcal{H}=0$: $\frac{1}{\chi_0} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}\right)_{T,\mathcal{H}\to 0} = a(T)$

$\underline{a_0 = 0}$ da $a(T_c) = 0$, dvs.

$$a(T) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad b(T) = b_0 + b_1 t + \dots$$

Til laveste orden: $\mathcal{H} = a_1 t M + b_0 M^3$

dvs. $\mathcal{H} = \mathrm{sgn}(M)|M|^\delta = b_0 M^3$ for $t=0$, dvs. $\underline{\underline{\delta = 3}}$

For $\mathcal{H}=0$ og $t<0$: $M(b_0 M^2 + a_1 t) = 0$

dvs. $M_0(t) = \sqrt{\frac{a_1}{b_0}(-t)} \sim (T_c - T)^\beta$ for $t<0$, dvs. $\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$

Susceptibiliteten:

$$\chi_0 = \lim_{\mathcal{H}\to 0} \chi = \lim_{\mathcal{H}\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \sim (T-T_c)^{-\gamma} \text{ for } T > T_c$$

$$\mathcal{H} = a_1 t M + b_0 M^3, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = a_1 t + 3b_0 M^2, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \frac{1}{a_1 t + 3b_0 M^2},$$

dvs. $\chi_0^+ = \frac{1}{a_1 t} \sim (T-T_c)^\gamma$ for $T > T_c$, dvs. $\underline{\underline{\gamma = 1}}$

For $T < T_c$: $b_0 M^2 = a_1(-t)$

$\chi_0^- = \frac{1}{a_1 t + 3b_0 M_0^2} = \frac{1}{2a_1(-t)} \sim (T_c - T)^{-\gamma'}$ for $T < T_c$, dvs. $\underline{\underline{\gamma' = 1}}$

Oppgave 3b

Termodynamisk identitet:

$$dF = -S\,dT + \mu_0 \mathcal{H}\,dM, \qquad (F = U - TS)$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\mu_0\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M$, dvs. $\underline{\underline{S = S_0(T) - \mu_0 \int_0^M dM\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M}}$

Videre:

$$\mathcal{H} = a_1 t M + b_0 M^3, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}_M = a_1 M$$

dvs. $S(T,M) = S_0(T) - \mu_0 a_1 \int_0^M M\,dM = S_0(T) - \frac{\mu_0 a_1}{2} M^2$

Spesifikk varme for $T > T_c$ og $T < T_c$:

$$C^+_{\mathcal{H}=0} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}=0} = T\frac{dS_0}{dT}, \qquad C^-_{\mathcal{H}=0} = T\frac{dS_0}{dT} - \frac{\mu_0 a_1 T}{2}\frac{d(M_0^2)}{dT}$$

$$\left[C^-_{\mathcal{H}=0} - C^+_{\mathcal{H}=0}\right]_{T=T_c} = \frac{\mu_0 a_1}{2}\cdot T_c \cdot \left(\frac{a_1}{b_0}\right) = \frac{\mu_0 a_1^2}{2b_0} T_c$$

dvs. $\underline{\alpha = \alpha' = 0}$

Oppgave 3c

Spesifikk varme ved konstant felt:

$$C_{\mathcal{H}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M + T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}$$

Helmholtz' fri energi: $dF = -S\,dT + \mu_0 \mathcal{H}\,dM$

dvs. $\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\mu_0\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M = \mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} \Big/ \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T$

som følger av $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} + \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}\right)_M = 0$

Nå er $C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M$, $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T$, dvs.

$$C_{\mathcal{H}} = C_M + \mu_0 T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}^2 \cdot \chi^{-1}$$

Lar så $\mathcal{H} \to 0$ for $T < T_c$. Da er

for ferromagnet: $\lim_{\mathcal{H}\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} = \frac{dM_0}{dT}$

Antar videre at $\lim_{\mathcal{H}\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \chi_0 < \infty$ (dvs. „endelig")

$C_M \geq 0$ gir $C_{\mathcal{H}=0} \geq \mu_0 T\left(\frac{dM_0}{dT}\right)^2 \chi_0^{-1}$

Tar logaritmen og dividerer med $[-\ln(T_c - T)]$:

Får: $-\frac{\ln C_{\mathcal{H}=0}}{\ln(T_c-T)} \geq -\frac{\ln(\mu_0 T)}{\ln(T_c-T)} - 2\frac{\ln(dM_0/dT)}{\ln(T_c-T)} + \frac{\ln \chi_0}{\ln(T_c-T)}$.

da $C_{\mathcal{H}=0} \sim (T_c-T)^{-\alpha'}$, $\frac{dM_0}{dT} \sim (T_c-T)^{\beta-1}$, $\chi_0 \sim (T_c-T)^{-\gamma'}$;

$$\alpha' \geq -2(\beta-1) - \gamma' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2}}$$

Tallverdier: $\underline{\underline{0 \geq -2(\tfrac{1}{2}-1) - 1 = 0}}$ (dvs. O.K.)

Oppgitt: $C_{\mathcal{H}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}$,

$C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M$.