STATISTISK FYSIKK

Oppgave 1

(i) Fysisk tydning: $n_2(\vec r_1, \vec r_2; TVN)\, d^3r_1\, d^3r_2$ er sannsynligheten for å finne en partikkel i d^3r_1 omkring $\vec r_1$ og samtidig en partikkel i d^3r_2 omkring $\vec r_2$ i et system av N partikler i et volum V i likevekt ved temperaturen T.

(ii) Svar:

$$n_2(\quad) = N(N-1)\,\frac{\int e^{-U/kT}\, d^3r_3 \ldots d^3r_N}{\int_V e^{-U/kT}\, d^3r_1 \ldots d^3r_N}\,, \qquad U(\vec r_1 \ldots \vec r_N) = \text{pot. energi.}$$

(iii)

$$n_2^{\text{ideell gass}} = \frac{N(N-1)}{V^2}$$

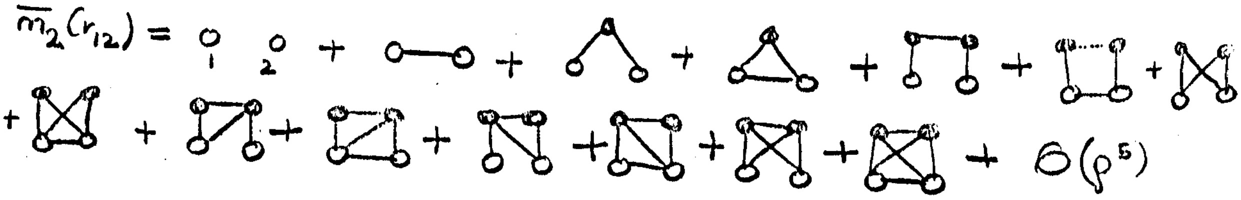
av ovenstående med $U=0$, eller direkte.

(iv) For et kanonisk ensemble som her er den makroskopiske (termodynamiske) grense: $V \to \infty$, $N \to \infty$, N/V = endelig = antallstettheten ρ.

(v) "Irreducibel" for grafene betyr her at om rotpunktene forbindes er grafen en stjerne, dvs at den ikke kan deles i to usammenhengende deler ved å fjerne ett punkt.

(vi)

$\bar n_2(r_{12}) =$



$+\ O(\rho^5)$

(vii) Til laveste orden er $\bar n_2(r) = \rho^2 + \rho^2 f(r)$, $f(r) = e^{-\beta\varphi(r)} - 1$, og det er tilstrekkelig her.

Fluktuasjonsteoremet gir

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = kT\left[1 + \rho \int f(r)\, d^3r\right]^{-1} = kT\left(1 - \rho \int f(r)\, d^3r\right) + O(\rho^2).$$

$$\supset: \underline{p = kT\rho - \tfrac{1}{2} kT \rho^2 \int f(r)\, d^3r + O(\rho^3)}$$

Virialteoremet gir

$$p = kT\rho - \frac{1}{6}\,\rho^2 \int_0^\infty 4\pi r^2 dr\; r\varphi'(r)\, e^{-\beta\varphi(r)} =$$

$$= kT\rho + \frac{1}{6} kT \rho^2\, 4\pi \int_0^\infty dr\, r^3\, \frac{d}{dr}\underbrace{\left[e^{-\beta\varphi(r)} - 1\right]}_{f(r)} \underset{\text{delvis}}{=}$$

$$= kT\rho - \tfrac{1}{2} kT \rho^2\, 4\pi \int_0^\infty dr\; r^2 f(r)$$

(viii) Svar

$$\frac{I(\vartheta)}{I_0(\vartheta)} = 1 + \frac{1}{\rho}\int d\vec{r}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, G(r), \qquad G(r) \equiv \bar{n}_2(r) - \rho^2.$$

$$k = \frac{4\pi}{\lambda} \sin\frac{\vartheta}{2}$$

(ix) For langsomme nøytroner må en ta hensyn til tidsavhengigheten til korrelasjonene. $G(\vec{r})$ beskriver stedskorrelasjoner til samme tidspunkt, og ovenstående utledning forutsetter foton/nøytron-hastighet $\gg$ stoffets termiske hastigheter.

(x) For store λ er $k \approx 0$, og

$$\frac{I(\vartheta)}{I_0(\vartheta)} \simeq 1 + \frac{1}{\rho}\int d\vec{r}\, G(r) = \frac{kT}{(\partial p/\partial \rho)_T}$$

etter fluktuasjonsteoremet. Og $(\partial p/\partial\rho)_T \to 0$ ved det kritiske punkt!

Oppgave 2.

a) For $t \to 0+$ vil $M \to r\,\mathcal{H}^{a-s}\, t^{-b+s\mu}$ som eksisterer bare for $\underline{b = s\mu}$.

For $\mathcal{H} \to 0$ (og $t > 0$) vil $M \to r\,\mathcal{H}^{a+s}\, t^{-b-s\mu}$ og

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}}\right)_T \to (a+s)\, r\, \mathcal{H}^{a+s-1}\, t^{-b-s\mu}$$

som eksisterer bare om $\underline{a+s-1=0}$. Dvs. $\boxed{\begin{array}{l} s = 1-a \\ \mu = b/(1-a) \end{array}}$

Kritiske indekser:

Av dette følger $M \propto \mathcal{H}^{a-s} = \mathcal{H}^{2a-1}$ $(t \to 0)$ og

$\mathcal{H}(t\to 0) \propto M^{\frac{1}{2a-1}}$ $\therefore$ $\underline{\underline{\delta = \frac{1}{2a-1}}}$

Videre

$\chi_T(\mathcal{H}\to 0) \sim |t|^{-b-s\mu} = |t|^{-2b}$ $\therefore$ $\underline{\underline{\gamma = \gamma' = 2b}}$

For $t < 0$ og $\mathcal{H} \to 0$ er $M \sim |t|^c$ $\therefore$ $\underline{\underline{\beta = c}}$

Det er tydelig at kombinasjonen $\varkappa\,|t|$ er kombinasjonen x. Ved å sette $\varkappa = |t|^{+u} \cdot x$ inn for $\varkappa$ fås

$$M\,|t|^{-c} = \begin{cases} q + r\,x^{a}\,|t|^{-b-c+au}\, e^{-s\sqrt{\ln^2 x + v^2}} & t<0 \\ r\,x^{a}\,|t|^{-b-c+au}\, e^{-s\sqrt{\ln^2 x + v^2}}, & t>0 \end{cases}$$

Høyre side er en funksjon av x alene om

$$c = au - b = \frac{ab}{1-a} - b = \underline{\underline{\frac{2a-1}{1-a}\,b}},$$

og venstre side er en kombinasjon av M og $|t|$ alene

$$y = M\,|t|^{-c}.$$

c) Det er forutsatt at

$$G = |t|^{\frac{2ab}{1-a}}\, g\left(\varkappa\,|t|^{-\frac{b}{1-a}}\right).$$

$$C_{\varkappa} = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial |t|^2}\right)_{\varkappa} = -T\left\{ |t|^{\frac{2ab}{1-a}-2} \cdot \frac{2ab}{1-a}\left(\frac{2ab}{1-a}-1\right) g(\;) \right.$$
$$+ 2\,\frac{2ab}{1-a}\cdot\frac{-b}{1-a}\cdot \varkappa\,|t|^{\frac{2a-1}{1-a}b-2}\, g'(\;)$$
$$+ \frac{b}{1-a}\left(\frac{b}{1-a}+1\right)\varkappa\,|t|^{-\frac{2a-1}{1-a}-2}\, g'(\;)$$
$$\left. + \left(\frac{b}{1-a}\right)^2 \varkappa^2\,|t|^{-\frac{2a-2}{1-a}b-2}\, g''(\;) \right\}$$

$$C_{\varkappa\to 0} \to -T\cdot\frac{2ab}{1-a}\cdot\left(\frac{2ab}{1-a}-1\right) g(0)\,|t|^{\frac{2ab}{1-a}-2}$$

$$\Rightarrow: \boxed{\alpha = \alpha' = 2 - \frac{2ab}{1-a}}$$