Fasit Eksamen TFY 4230
Statistisk Fysikk Hausten 2005

December 10, 2005

Oppgave 1

a) Marginalfordelinga $P(p)$ er

$$P(p) \quad = \quad c\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta\,(E-H)$$

Integrasjon gir

$$P(p) \quad = \quad \frac{2c}{V_0}\,,$$

der ein har brukt at $\delta(a-bx)=\frac{1}{b}\delta(a/b-x)$ og at $P(p,x)$ har to nullpkt. pga absoluttverdien som inngår i H. Normaliseringskravet gir

$$\begin{aligned} 1 &= \int P(p)dp \\ &= \frac{2c}{V_0}\int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} dp \\ &= \frac{4c\sqrt{2mE}}{V_0}\,. \end{aligned}$$

Dette gir

$$c = \underline{\underline{\frac{V_0}{4\sqrt{2mE}}}}$$

og dermed den normaliserte fordelinga

$$P(p) \quad = \quad \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2mE}}}}\,.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2mE}} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \frac{p^2}{2m} dp \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}E}}\end{aligned}$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{-\beta H} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \frac{2k_B T}{V_0}}}}\end{aligned}$$

d) Midlere energi er

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} k_B T}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Det finst 8 moglege spinnkonfigurasjonar:

$$\underline{\underline{(\uparrow\uparrow\downarrow)}}, \ \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\uparrow)}}, \ \underline{\underline{(\uparrow\uparrow\uparrow)}}, \ \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\uparrow)}}, \ \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\downarrow)}}, \ \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\downarrow)}}, \ \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\uparrow)}}, \ \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\downarrow)}},$$

Dei tilhøyrande energiane er

$$\underline{\underline{\epsilon_1 = -2J}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_2 = -2J}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_3 = 0}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_4 = 0}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_5 = 0}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_6 = 0}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_7 = 2J}} \ \ \underline{\underline{\epsilon_8 = 2J}}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}Z &= \sum_{i=1}^{8} e^{-\beta\epsilon_i} \\ &= 4 + 2e^{2\beta J} + 2e^{-2\beta J} \\ &= \underline{\underline{8\cosh^2(\beta J)}}\end{aligned}$$

c) Midlere energi

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \underline{\underline{-2J \tanh \beta J}}\end{aligned}$$

Grensa $T \to 0$ gir

$$\lim_{T \to 0} E = \underline{\underline{-2J}}$$

Tolkning: Ved $T = 0$ er systemet i grunntilstanden som har energi $-2J$.

d) Korrelasjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}\langle s_1 s_3 \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_i=\pm 1} (s_1 s_2)(s_2 s_3) e^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\ &= \underline{\underline{-\tanh^2(\beta J)}}\end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T\to 0} \langle s_1 s_3 \rangle = \underline{\underline{-1}}$$

Tolkning: For $T = 0$ er systemet i grunntilstanden. I grunntilstanden peiker s_1 opp og s_3 ned eller omvendt. Dette impliserer $\langle s_1 s_3 \rangle = -1$.

Oppgave 3

a) Vi har

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_x^2 \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} R^2 \ ,\end{aligned}$$

der $n_x = 0, 1, 2, ...$ Antall tilstandar med energi mindre enn ϵ:

$$\begin{aligned}\Phi(\epsilon) &= R \\ &= 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} L \epsilon^{1/2} \ .\end{aligned}$$

Derav følger

$$\begin{aligned}g(\epsilon) &= \frac{d\Phi}{d\epsilon} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2m}{h^2}} L \epsilon^{-1/2}}} \ .\end{aligned}$$

b) Tettheiten er

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon^{-1/2} d\epsilon \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \epsilon_F^{1/2}}}\end{aligned}$$

Den indre energien er

$$\begin{aligned}U &= \sqrt{\frac{2m}{h^2}} L \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m}{h^2}} L \epsilon_F^{3/2}}}\end{aligned}$$

Her har ein brukt at FD fordelingsfunksjonen blir ein Heaviside step funksjon i grensa $T \to 0$. Trykket er

$$\frac{P}{k_B T} = \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}]\epsilon^{-1/2} d\epsilon$$

Delvis integrasjon gir da

$$P = 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} d\epsilon$$

Dette gir i grensa $T = 0$:

$$\begin{aligned} P &= 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon)\epsilon^{1/2} d\epsilon \\ & \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2m}{h^2}}\epsilon_F^{3/2}}} \end{aligned}$$

Vi har her brukt at $\mu = \epsilon_F$ ved $T = 0$.

c) Vi har

$$\epsilon_F = \frac{1}{4}\frac{h^2}{2m}\rho^2 .$$

Innsett i uttrykket for P får vi

$$P = \underline{\underline{\frac{1}{6}\frac{h^2}{2m}\rho^3}}$$

d) Dette er ein konsekvens av Pauliprinsippet som impliserer at alle tilstandane opp til ϵ_F er besatt.

Oppgave 4

a) Andre virialkoeffisienten er

$$B_2(T) = \frac{1}{2}\int d^3x \left[1 - e^{-\beta\phi(x)}\right] .$$

Boyletemperaturen er definert ved

$$B_2(T^*) = 0 .$$

b) Ekvipartisjonsprinsippet seier at kvart kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen gir eit bidrag $\frac{1}{2}k_B T$ til den midlere energien og dermed $\frac{1}{2}k_B$ til varmekapasiteten.

c) Ved lave temperaturar går varmekapasiteten som T^3 og for høge temperaturar gjeld ekvipartisjonsprinsippet og varmekapasiteten er konstant.

d) Det er klassiske forhold dersom

$$\Lambda^3\rho \ll 1 ,$$

der ρ er tettheiten og Λ er den termiske bølgelengda.