Fasit Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk August 2006

December 19, 2008

Oppgave 1

Marginalfordelinga $P(x)$ er

$$P(x) \quad = \quad c\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\delta(E - H(p,x))\ .$$

Integrasjon gjev

$$P(x) \quad = \quad \frac{2mc}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}}\ ,$$

der ein har brukt at

$$\delta(f(x)) = \sum_{x^*} \frac{1}{|f'(x^*)|}\delta(x - x^*)\ ,$$

der x^* er nullpunkta til funksjonen $f(x) = E - p^2/2m - V_0|x|$. I dette tilfellet er det to nullpunkt pga absoluttverdien som inngår i H. Normeringskravet gjev

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad \int P(x)\,dx \\ &= \quad 2mc\int_{-E/V_0}^{E/V_0} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V_0|x|)}} \\ &= \quad \frac{4c\sqrt{2mE}}{V_0}\ . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$c \quad = \quad \underline{\underline{\frac{V_0}{4\sqrt{2mE}}}}\ ,$$

og dermed den normerte fordelinga

$$P(x) \;=\; \underline{\underline{\frac{mV_0}{2\sqrt{2mE}}\frac{1}{\sqrt{2m(E-V_0|x|)}}}}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\langle V_0|x|\rangle &= \frac{mV_0^2}{\sqrt{2mE}}\int_{-E/V_0}^{E/V_0}\frac{|x|dx}{\sqrt{2m(E-V_0|x|)}}\\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3}E}}\,.\end{aligned}$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned}Z &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\,e^{-\beta H}\\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi mk_BT}{h^2}}\frac{2k_BT}{V_0}}}\,.\end{aligned}$$

d) Fluktuasjonane er

$$\begin{aligned}(\Delta E)^2 &= -\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}(k_BT)^2}}\,.\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Det finst 8 moglege spinnkonfigurasjonar

$$\underline{\underline{(\uparrow\downarrow\uparrow)\,,\quad(\downarrow\uparrow\downarrow)\,,\quad(\uparrow\uparrow\downarrow)\,,\quad(\downarrow\downarrow\uparrow)\,,\quad(\downarrow\uparrow\uparrow)\,,\quad(\uparrow\downarrow\downarrow)\,,\quad(\uparrow\uparrow\uparrow)\,,\quad(\downarrow\downarrow\downarrow)}}\,.$$

Dei tilhøyrande energiane er

$\epsilon_1 = \underline{\underline{-2J}}\,, \epsilon_2 = \underline{\underline{-2J}}\,, \epsilon_3 = \underline{\underline{0}}\,, \epsilon_4 = \underline{\underline{0}}\,, \epsilon_5 = \underline{\underline{0}}\,, \epsilon_6 = \underline{\underline{0}}\,, \epsilon_7 = \underline{\underline{-2J}}\,, \epsilon_8 = \underline{\underline{-2J}}\,,$

b) Vi har

$$\begin{aligned}Z &= \sum_{i=1}^{8}e^{-\beta\epsilon_i}\\ &= 4+2e^{2\beta J}+2e^{-2\beta J}\\ &= \underline{\underline{8\cosh^2(\beta J)}}\,.\end{aligned}$$

Midlere energi

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}\\ &= \underline{\underline{-2\tanh(\beta J)}}\,.\end{aligned}$$

Grensa $T \to \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} \langle E \rangle = \underline{\underline{0}} \, .$$

Tolkning: Når $T \to \infty$ er sannsyna den same for at systemet er i ein gitt tilstand, i.e. 1/8. Midlere energi er difor $(-2J-2J+0+0+0+0+2J+2J)/8 = 0$.

d) Korrelasjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} \langle s_1 s_2 \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_i=\pm 1} s_1 s_2 e^{\beta J(s_1 s_2 + s_2 s_3)} \\ &= \underline{\underline{-\tanh(\beta J)}} \, . \end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T\to\infty} \langle s_1 s_2 \rangle = \underline{\underline{0}} \, .$$

Tolkning: For $T \to \infty$ er alle tilstandar like sannsynlege. Altså er systemet ukorrelert og korrelasjonsfunksjonen er null.

Oppgave 3

a) Energien til ein partikkel kan uttrykkast ved dei to kvantetalla n_x and n_y:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2) \, .$$

Antal tilstandar $\Phi(\epsilon)$ med energi mindre enn ϵ er lik arealet av den delen av sirkelen som ligg i første kvadrant med radius $R = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$, altså

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon) &= \frac{1}{4}\pi R^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi \left(n_x^2 + n_y^2\right) \\ &= \frac{2\pi m V}{h^2} \, . \end{aligned}$$

Derivasjon med omsyn på ϵ gjev tettleiken av tilstandar:

$$g(\epsilon) = \underline{\underline{\frac{2\pi m V}{h^2}}} \, ,$$

b) Tettheiten er

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon) d\epsilon \\ &= \underline{\underline{\frac{2m\pi}{h^2}\epsilon_F}} \, . \end{aligned}$$

Den indre energien er

$$\langle E \rangle = \frac{2m\pi}{h^2} V \int_0^\infty \theta(\mu - \epsilon)\epsilon d\epsilon$$
$$= \underline{\underline{\frac{m\pi}{h^2} V \epsilon_F^2}} \ .$$

Her har vi brukt at FD fordelingsfunksjonen blir ein stepfunksjon i grensa $T \to 0$. Trykket blir

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}] d\epsilon \ .$$

Delvis integrasjon gjev

$$P = \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon \ .$$

I grensa $T = 0$ gjev dette

$$P = \frac{2m\pi}{h^2} \int_0^\infty \epsilon \, \theta(\mu - \epsilon) \, d\epsilon$$
$$= \underline{\underline{\frac{m\pi}{h^2} \epsilon_F^2}} \ .$$

c) Vi har

$$\epsilon_F = \rho \frac{h^2}{2m\pi} \ .$$

Innsett i uttrykket for P får vi

$$P = \underline{\underline{\frac{h^2}{4m\pi} \rho^2}} \ .$$

d) Dette er ein konsekvens av Pauliprinsippet som impliserer at alle tilstandane opp til ϵ_F er besatt.

Oppgave 4

a) Dersom temperaturen til ein ideell Bosegass blir så låg at den termiske bølgjelengda $\Lambda \sim \rho^{-1/3}$ byrjar kvanteeffektar å bli viktige. Partiklane kondenserer ned i lågaste einpartikkeltilstand på ein nokså brå måte. Vi har

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \ .$$

b) Ein rekkjeutviklar trykket til ein reell gass i potensar av tettheiten. Viss tettheiten er låg, ventar ein små avvik frå ideell gasslov. Altså:

$$\frac{P}{k_B T} = \rho + B_2(T)\rho^2 + B_3(T)\rho^3 + ..,$$

der $B_n(T)$ er nte virialkoeffisent. Desse koeffisientane kan reknast ut dersom ein kjenner vekselverknaden mellom partiklane. I praksis må ein gjere visse tilnærmingar for å kunne rekne ut korreksjonane til ideell gasslov.

c) Ekvipartisjonsprinsippet seier at kvart kvadratisk ledd i Hamiltonfunksjonen gjev eit bidrag $\frac{1}{2}k_BT$ til partisjonsfunksjonen. Det er fire kvadratiske ledd i H, slik at $C_V = 2k_B$.

d) Desse er temperaturen T, det kjemiske potensialet μ og volumet V.