Fasit Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk 5. desember 2006

December 19, 2008

Oppgave 1

a) Normalisering av sannsynsfordelinga

$$I = c\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta\left(E - H\right) = 1\ .$$

Vi definerer

$$f(x) \quad = \quad \frac{p^2}{2m} + V_0\sqrt{|x|} - E\ ,$$

som gjev

$$|f'(x)| \quad = \quad \frac{V_0}{2\sqrt{|x|}}\ .$$

Nullpunkta x^* til $f(x)$ er

$$x^* \quad = \quad \pm\frac{1}{V_0^2}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)^2\ .$$

Dette gjev da

$$\frac{1}{|f'(x^*)|} \quad = \quad \frac{2}{V_0^2}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\ .$$

Ein bruker nå at

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{x^*}\frac{1}{|f'(x^*)|}\delta(x - x^*)\ ,$$

der x^* er nullpunkta til $f(x)$. Dette gjev

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{V_0^2} \int_{\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right)^2 \, dp \, , \\ &= \frac{16c}{3V_0^2} E \sqrt{2mE} \, . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$c = \underline{\underline{\frac{3V_0^2}{16E\sqrt{2mE}}}}$$

og dermed den normaliserte fordelinga

$$P(p) = \underline{\underline{\frac{3}{4E\sqrt{2mE}} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right)}} \, .$$

b) Vi har

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \frac{p^2}{2m} P(p) \, dp \, .$$

Integrasjon gjev

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \underline{\underline{\frac{1}{5} E}} \, .$$

Vi har

$$\langle H \rangle = E \, .$$

Dette gjev

$$\langle V_0 \sqrt{|x|} \rangle = E - \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \, .$$

Dette gjev

$$\langle \sqrt{|x|} \rangle = \underline{\underline{\frac{4E}{5V_0}}} \, .$$

c) Partisjonsfunksjonen er

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta V_0 \sqrt{|x|}} \, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2/2m} \, dp \\ &= \sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \frac{4}{(\beta V_0)^2} \int_0^{\infty} y e^{-y} \, dx \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \frac{4}{(\beta V_0)^2}}} \, . \end{aligned}$$

d) Middelverdien er

$$
\begin{aligned}
\langle\sqrt{|x|}\rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{|x|}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\;e^{-\beta H}}{\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\;e^{-\beta H}} \\
&= -\frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial V_0} \\
&= \underline{\underline{\frac{2}{\beta V_0}}}\;.
\end{aligned}
$$

Dette gjev

$$
\langle V_0\sqrt{|x|}\rangle = 2k_BT\;.
$$

Midlere energi er

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= -\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta} \\
&= \frac{5}{2}k_BT\;.
\end{aligned}
$$

Dette gjev

$$
\langle\sqrt{|x|}\rangle = \underline{\underline{\frac{4E}{5V_0}}}\;.
$$

Same som i punkt b)!

Oppgave 2

a) Den storkanoniske partisjonsfunksjonen er

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta\mu N}Z_N \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\left[2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)\right]^N
\end{aligned}
$$

Dette er ei geometrisk rekke og summen er

$$
\Theta = \underline{\underline{\frac{1}{1-2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)}}}\;.
$$

b) Partikkeltalet er

$$
\begin{aligned}
\langle N\rangle &= k_BT\frac{\partial\ln\Theta}{\partial\mu} \\
&= \underline{\underline{\frac{2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)}{1-2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)}}}\;.
\end{aligned}
$$

c) Frå b) får vi

$$e^{\beta\mu} = \frac{\langle N\rangle}{\langle N\rangle + 1}\frac{1}{2\cosh(\beta\epsilon_0)}$$

Dette gjev

$$\mu = \underline{\underline{k_BT\ln\left[\frac{\langle N\rangle}{\langle N\rangle + 1}\frac{1}{2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)}\right]}} .$$

d) Frå c) har vi

$$2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0) = \frac{\langle N\rangle}{\langle N\rangle + 1} .$$

Dette gjev

$$\Theta = 1 + \langle N\rangle .$$

Innsett får vi

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{e^{\beta\mu N}Z_N}{\Theta} \\ &= \underline{\underline{\frac{\langle N\rangle^N}{(\langle N\rangle + 1)^{N+1}}}} . \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) I grensa $T \to 0$ får vi

$$\rho = \frac{1}{\hbar^2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\theta(\mu - \epsilon) ,$$

der

$$\epsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} .$$

Integrasjon gjev da

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dp\, p\theta(\mu - \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}) \\ &= \underline{\underline{\frac{p_F^2}{4\pi\hbar^2}}} , \end{aligned}$$

der Fermiimpulsen er definert ved $\mu = \epsilon_F = \sqrt{p_F^2 + m^2c^4}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\langle E\rangle}{V} &= \frac{1}{\hbar^2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\epsilon\theta(\mu - \epsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dp\, p\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\theta(\mu - \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6\pi\hbar^2c^2}\left[\left(p_F^2c^2 + m^2c^4\right)^{\frac{3}{2}} - m^3c^6\right]}} , \end{aligned}$$

og

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\hbar^2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(\mu-\epsilon)\theta(\mu-\epsilon) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dp\, p(\mu-\epsilon)\theta(\mu-\epsilon) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{12\pi\hbar^2c^2}\left[3p_F^2\sqrt{p_F^2c^2+m^2c^4}-\frac{2}{c^2}\left(p_F^2c^2+m^2c^4\right)^{\frac{3}{2}}+2m^3c^4\right]}}\,.
\end{aligned}
$$

c) I den ultrarelativistiske grensa er $m = 0$. Dette gjev

$$
P = \frac{p_F^3 c}{12\pi\hbar^2}\,.
$$

Frå uttrykket for ρ finn ein

$$
p_F = \sqrt{4\pi\hbar^2\rho}
$$

Dette gjev

$$
P = \underline{\underline{\frac{\hbar c}{3}\sqrt{4\pi}\rho^{\frac{3}{2}}}}\,.
$$

d) Vi rekkeutviklar til fjerde orden $x = p_F/mc \ll 1$:

$$
\frac{\langle E\rangle}{V} = \underline{\underline{mc^2\frac{p_F^2}{4\pi\hbar^2}+\frac{p_F^4}{16\pi m\hbar^2}}}\,,
$$

der vi har brukt

$$
(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+...,
$$

der $x = p_F^2/(mc)^2$. Det første leddet er $mc^2\rho$, slik at dette er bidraget til energitettheiten som kjem frå kvileenergien til partiklane.

Oppgave 4

a) Anta

$$
H = ap_i^2 + H'(p,q)\,,
$$

der variablen p_i ikkje inngår i funksjonen $H'(p,q)$. Forventningsverdien til leddet ap_i^2 er

$$
\langle ap_i^2\rangle = \frac{\int ap_i^2 e^{-\beta(ap_i^2+H'(p,q))}dpdq}{\int e^{-\beta(ap_i^2+H'(p,q))}dpdq}\,.
$$

Sidan integrasjonen over alle p'ane og q'ane unntatt p_i er den same i tellar of nevnar, kan ein forkorte desse faktorane. Dette gir

$$
\langle ap_i^2\rangle = \frac{\int ap_i^2 e^{-\beta ap_i^2}dp_i}{\int e^{-\beta ap_i^2}dp_i}\,.
$$

Integrasjon gir

$$\langle ap_i^2 \rangle \quad = \quad \frac{1}{2}k_B T \; .$$

Kvart kvadratisk ledd i den klasssiske Hamiltonfunksjonen gir eit bidrag $\frac{1}{2}k_B T$ til energien og difor eit bidrag $\frac{1}{2}k_B$ til varmekapasiteten. Forutsetninga er separasjonen av H.

b) Hamiltonfunksjonen er

$$H \quad = \quad -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - B\mu \sum_{i=1}^{N} s_i \; ,$$

der $N+1 = 1$ pga av periodiske randkrav. Det er eit spinn på kvart gitterpunkt og desse spinna vekselverkar med nærmaste nabo. Koplinga mellom spinna er J og vekselverknaden avheng berre av den relative retninga til spinna. Dette er det første leddet. Det andre leddet er av paramagnetisk type (magnetisk moment i ytre magnetfelt). Kvart spinn vekselverkar med magnetfeltet. Antiferromagnetisme tyder $J < 0$ og energien blir minimal viss annakvart spinn peikar opp og annakvart spinn peikar ned. Dette er da grunntilstanden (som er dobbelt degenerert).

c) Materie i ein kvit dverg er essensielt eit gitter av positive ionar og ein degenerert elektrongass. Dvergen er elektrisk nøytral og temperaturen er låg ($T \ll T_F$, der T_F er Fermitemperaturen). Det er kvantetrykket som er motverkar kollaps. Kvantetrykket er ein konsekvens av Pauliprinsippet, som seier at identiske fermion ikkje kan vere i same kvantetilstand. Dette trykket er altså ein kvantemekanisk effekt. Derav namnet. Kvantetrykket er dominert av elektronbidraget.

d) Det er klassiske forhold dersom

$$\rho\Lambda^3 \ll 1 \; ,$$

der Λ er den termiske bølgelengda og ρ er tettheiten.