Løysingsframlegg Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk 19/12-2007

January 10, 2008

Oppgave 1

1) Faktoren $N!$ er Gibbs' korreksjonsfaktor som ein må innføre ad hoc i klassisk statistisk mekanikk fordi partiklane i gassen ikkje er skillbare. Vi har

$$Z = \frac{1}{h^2} \int e^{-\beta H} d^2p d^2x \ ,$$

der vi har delt på h^2 slik at den klassiske partisjonsfunksjonen blir dimensjonslaus. Sidan H er uavhengig av posisjonen, gir integrasjon over koordinatane ein faktor $V = L^2$. Når vi skal integrere over impulsen nyttar vi polarkoordinatar. Integrasjon over vinkelen θ gir ein faktor 2π. Dette gjev

$$Z = \frac{2\pi V}{h^2} \int_0^\infty e^{-\beta H} p dp \ ,$$

Skifte av variabel $y = \beta\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ gjev

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2\pi V}{(\beta hc)^2} \int_{\beta mc^2}^\infty y e^{-y} dy \\ &= \underline{\underline{\frac{2\pi V}{(\beta hc)^2}(1 + \beta mc^2) e^{-\beta mc^2}}} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \\ &= -N \frac{\partial}{\partial \beta}\left[-2\ln\beta - \beta mc^2 + \ln(1 + \beta mc^2) + ...\right] \\ &= \underline{\underline{N\left[2k_BT + mc^2 - \frac{mc^2}{1 + \beta mc^2}\right]}} \ . \end{aligned}$$

I den ikkjerelativistiske grensa er $\beta mc^2 \gg 1$ og vi kan rekkeutvikle siste leddet i $\langle E \rangle$. Vi får da

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= N\left[2k_BT + mc^2 - \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{1}{\beta mc^2}}\right] \\
&\approx N\left[k_BT + mc^2 - \frac{1}{\beta}\right] , \\
&= \underline{\underline{N(mc^2 + k_BT)}} .
\end{aligned}$$

Første leddet er kvilenergien til partiklane. Det andre leddet er termisk energi. Det er to kvadratiske ledd i H og ekvipartisjonsprinsippet gjev eit bidrag $k_BT/2$ frå kvart av dei.

3) For små verdiar av βmc^2 rekkeutviklar vi siste leddet til første orden:

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= N\left[2k_BT + mc^2 - \frac{mc^2}{1+\beta mc^2}\right] \\
&\approx N\left[2k_BT + mc^2 - mc^2(1-\beta mc^2)\right] \\
&= \underline{\underline{N\left[2k_BT + \frac{(mc^2)^2}{k_BT}\right]}} .
\end{aligned}$$

4) Vi har

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\
&= \underline{\underline{Nk_B\left[2 - \frac{1}{(1+k_BT/mc^2)^2}\right]}} .
\end{aligned}$$

Oppgave 2

1) J er styrken på spinn-spinn vekselverknaden (nærmaste nabo). Dersom J er positiv har spinna ein tendens til å vere parallelle ved låg temperatur (minimalisering av energien). Dette er ein ferromagnetisk Ising modell. Dersom $J < 0$ vil spinna gjerne peike i motsett retning ved låg temperatur og dette er det antiferromagnetiske tilfellet.

2) For kvar spinnkonfigurasjon $\{s_i\}$ med energi $E = H(\{s_i\})$, er det ein spinkonfigurasjon med same energi, der alle spinna peikar i motsett retning. Desse to konfigurasjonane er like sannsynlege og midlere spinn må da bli null.

3) Kvart spin er ein paramagnet som vekselverkar med det ytre magnetfeltet B. Proporsjonalitetskonstanten μ er det magnetiske momentet. Vi har da:

$$H_B = \underline{\underline{-\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i}} .$$

Oppgave 3

1) Vi har

$$\rho_{\text{ex}} = \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} .$$

Vi bruker polarkoordinatar og integrasjon over ϕ gjev ein faktor 2π:

$$\rho_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} dp .$$

Ny variabel $y = \beta p^2/2m$ gjev

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{ex}} &= \frac{1}{2\pi\hbar^2} \frac{m}{\beta} \int_0^\infty \frac{dy}{e^{y-\beta\mu} - 1} \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu - y} dy}{1 - e^{\beta\mu - y}} .
\end{aligned}$$

Integrasjon mop y gjev nå

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{ex}} &= \frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu - y}) \Big|_0^\infty \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu})}} .
\end{aligned}$$

Alternativt kan ein skrive integranden som ei geometrisk rekke og integrere ledd for ledd. Ein kan da idenifisere den rekka som ein har integrert som Taylorrekka for $\ln(1 - e^{\beta\mu})$.

2) Rekkeutvikling av uttrykket for ρ gjev

$$\begin{aligned}
\rho &= -\frac{1}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\beta\mu}) \\
&= \frac{1}{\Lambda^2} \left[z + \frac{1}{2} z^2 + ... \right] .
\end{aligned}$$

Dette gjev: $\underline{\underline{a_1 = \frac{1}{\Lambda^2},\, a_2 = \frac{1}{2\Lambda^2}}}$

Vi har

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) .$$

Integrasjon over vinklar og skifte av variabel gjev

$$\begin{aligned}
\frac{P}{k_B T} &= -\frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty dp\, p \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) \\
&= -\frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty d\epsilon \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) .
\end{aligned}$$

Rekkeutvikling av integranden og integrasjon ledd for ledd gjev:

$$\begin{aligned}\frac{P}{k_BT} &= \frac{2\pi m}{h^2}\int_0^\infty d\epsilon\left[e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+\frac{1}{2}e^{-2\beta(\epsilon-\mu)}+...\right]\\ &= \frac{2\pi m}{\beta h^2}\left[e^{\beta\mu}+\frac{1}{4}e^{2\beta\mu}...\right]\\ &= \frac{1}{\Lambda^2}\left[z+\frac{1}{4}z^2...\right]\ .\end{aligned}$$

Dette gjev $\underline{\underline{b_1 = \frac{1}{\Lambda^2},\ b_2 = \frac{1}{4\Lambda^2}\ .}}$

Invertering av uttrykket for ρ gjev

$$z = \Lambda^2\left(\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)\ .$$

Innsett i uttrykket for P/k_BT får vi

$$\begin{aligned}\frac{P}{k_BT} &= \left(\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)+\frac{1}{4}\rho^2\Lambda^2\\ &= \rho-\frac{1}{4}\Lambda^2\rho^2\ .\end{aligned}$$

Dette gjev $\underline{\underline{B_2(T) = -\frac{1}{4}\Lambda^2}}$. Den andre virialkoeffisienten er negativ. Dette er å vente sidan dette er ein Bose gas. Trykket er mindre for ein gitt tettheit samanlikna med ein klassisk ideel gass og har med statistikken (symmetriske bølgefunksjonar) å gjere. Dette er effektivt ei tiltrekkande kraft som gjev opphav til BEC.

3) Vi veit at $\mu \leq 0$ sidan alle besetningtala er positive. Ein ser direkte at $\rho_{\rm ex}$ er divergent når $\mu \to 0^-$ for alle endelege verdiar av β. Altså kan alle partiklane vere i dei eksiterte tilstandane for $T > 0$. For $T = 0$ er alle partiklane sjølsagt i grunntilstanden. Dette tyder at $\underline{\underline{T_c = 0}}$.

Oppgave 4

1) Vi har

$$\epsilon_\pm = \epsilon_F\ .$$

Dette gjev

$$\frac{\left(p_F^\pm\right)^2}{2m} = \epsilon_F \pm \mu B\ ,$$

eller

$$\underline{\underline{p_F^\pm = \sqrt{2m\left(\epsilon_F\pm\mu B\right)}}}\ .$$

2) Uttrykket for tettheiten er

$$\rho_\pm = \frac{1}{\hbar^3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\theta(\epsilon_F - \epsilon_\pm) \ .$$

Integrasjon over vinklar gjev:

$$\rho_\pm = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty dp\ p^2\theta(\epsilon_F - \epsilon_\pm) \ .$$

Multiplikasjon med V og bruk av step-funksjonen får vi

$$\underline{\underline{N_\pm = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F^\pm} dp\ p^2}} \ .$$

3) Integrasjon gjev

$$N_\pm = \frac{V\left(p_F^\pm\right)^3}{6\pi^2\hbar^3} \ .$$

Innsetting for $p_F^\pm$ gjev

$$\underline{\underline{N_\pm = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3}\left[2m\left(\epsilon_F \pm \mu B\right)\right]^{3/2}}} \ .$$

4) Til første orden i B har vi

$$M = M(B=0) + \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0} B \ .$$

Sidan $N_+ = N_-$ når $B = 0$, er $M(B=0) = 0$ og vi får

$$M = \chi B \ ,$$

der

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0} \ .$$

Derivasjon av $M = \mu(N - N_-)$ mop B gjev

$$\frac{\partial M}{\partial B} = \frac{Vm\mu^2}{2\pi^2\hbar^3}\left\{\left[2m\left(\epsilon_F + \mu B\right)\right]^{1/2} + \left[2m\left(\epsilon_F - \mu B\right)\right]^{1/2}\right\} \ .$$

Evaluert i $B = 0$ får vi

$$\underline{\underline{\chi = \frac{Vm\mu^2}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{2m\epsilon_F}}} \ .$$