Løysingsframlegg Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk onsdag 17/12-2008

August 19, 2009

Oppgåve 1

a) D er diffusjonskonstanten. Dette er ein "materialkonstant" som avheng av løysemiddelet og substansen som er løyst. Vi skriv

$$\mathbf{j} \quad = \quad -D\nabla C(x,t) \; .$$

Dette gjev

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad = \quad 0 \; .$$

Kontinuitetslikninga seier at talet på partiklar er bevart når det ikkje finst kjelder eller sluk. Dette er heilt analogt til elektromagnetisme der ladninga ρ er bevart.

b) Vi skriv

$$C(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} c(p,t)\, dp \; .$$

Innsett i diffusjonslikninga får vi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial c(p,t)}{\partial t} + Dp^2 c(p,t) \right] e^{ipx} dp \quad = \quad 0 \; .$$

Vi Fouriertransformerer tilbake

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial c(p,t)}{\partial t} + Dp^2 c(p,t) \right] e^{i(p-q)x} dp dx \quad = \quad 0 \; .$$

Vi har at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-q)x}\,dx \quad = \quad \delta(p-q)\ .$$

Etter integrasjon over p får ein

$$\frac{\partial c(q,t)}{\partial t} + Dq^2 c(q,t) \quad = \quad 0\ .$$

Løysinga til denne differensiallikninga er

$$c(q,t) \quad = \quad A(q)e^{-Dq^2 t}\ .$$

Vi har da at $c(q,t=0) = A(q)$. For å finne $A(q)$, må vi Fouriertransformere $C(x,t=0) = C_0(x)$:

$$\begin{aligned}
c(q,t=0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}C_0(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}e^{-\alpha x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-q^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+iq/2\alpha)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-q^2/4\alpha}
\end{aligned}$$

Altså er

$$c(q,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-q^2/4\alpha}e^{-Dq^2 t}\ .$$

For å finne $C(x,t)$ Fouriertransformerer vi $c(q,t)$:

$$\begin{aligned}
C(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}e^{-q^2/4\alpha}e^{-Dq^2 t}\,dq \\
&= \underline{\underline{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi(1+4Dt\alpha)}}e^{-x^2\frac{\alpha}{1+4Dt\alpha}}}}\ .
\end{aligned}$$

$C(x,t=0)$ er normert til ein. Vi ser at $C(x,t)$ også er normert til ein. Dette er ein konsekvens av partikkeltalet er bevart.

Oppgåve 2

a) Det første leddet representerer vekselverknaden mellom magnetfeltet og dei einskilde spinna. Dette er ein paramagnetisk vekselverknad. μ er magnetisk moment. Det andre leddet representerer næmaste-nabo vekselverknad, der J er styrken. $J > 0$ er det ferromagnetiske tilfellet (spinna er parallelle for $T = 0$) og $J < 0$ er det antiferromagnetiske tilfellet (spinna er antiparallelle for $T = 0$).

b) Hamiltonfunksjonen er

$$H = -\mu B(s_1 + s_2) - 2Js_1 s_2 \ .$$

Vi har fire moglege konfigurasjonar:

$$\underline{\underline{(\uparrow\uparrow)\ ,\quad (\uparrow\downarrow)\ ,\quad (\downarrow\uparrow)\ ,\quad (\downarrow\downarrow)}}\ .$$

Dei tilhøyrande energiane er

$$\begin{aligned} E((\uparrow\uparrow)) &= \underline{\underline{-2\mu B - 2J}}\ , \\ E((\uparrow\downarrow)) &= \underline{\underline{2J}}\ , \\ E((\downarrow\uparrow)) &= \underline{\underline{2J}}\ , \\ E((\downarrow\downarrow)) &= \underline{\underline{2\mu B - 2J}}\ . \end{aligned}$$

Partisjonsfunksjonen blir da

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2e^{-2\beta J} + e^{2\beta J}\left(e^{2\beta\mu B} + e^{-2\beta\mu B}\right) \\ &= \underline{\underline{2e^{-2\beta J} + 2e^{2\beta J}\cosh 2\beta\mu B}} \end{aligned}$$

c) Middelverdien til spinnet er

$$\langle s\rangle = \underline{\underline{\frac{e^{2\beta J}\sinh 2\beta\mu B}{e^{-2\beta J} + e^{2\beta J}\cosh 2\beta\mu B}}}\ .$$

Dette gjev

$$\lim_{B\to\infty}\langle s\rangle = \underline{\underline{1}}$$

Når $\mu B \gg J$ dominerer det paramagnetiske leddet i H. Når $B \to \infty$ kostar det uendeleg mykje energi å eksitere systemet og det må difor vere i grunntilstanden. Denne tilstanden har $s_1 = s_2 = \uparrow$. Altså $\lim_{B\to\infty}\langle s\rangle = 1$.

d) Vi kan skrive

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i\ ,$$

der $H_i = -\mu B s_i$, altså er H separabel. Sidan spinna er skillbare har vi $Z_N = Z^N$, der Z er partisjonsfunksjonen for eit spinn. Vi har

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s=\pm 1} e^{-\beta H(s)} \\ &= e^{-\beta\mu B} + e^{\beta\mu B} \\ &= 2\cosh\beta\mu B\ . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$Z_N = \underline{\underline{[2\cosh\beta\mu B]^N}}\ .$$

Midlere energi er

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \\
&= -N \frac{\partial}{\partial \beta} [\ln 2 + \ln \cosh \beta \mu B] \\
&= \underline{\underline{-N\mu B \tanh \beta \mu B}} \ .
\end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\lim_{T \to 0} \langle E \rangle = \underline{\underline{-N\mu B}} \ .$$

Når $T = 0$ er systemet i grunntilstanden og alle spinna peiker opp. For denne konfigurasjonen er $E = -N\mu B$.

Oppgåve 3

Hamiltonfunksjonen for ein partikkel er

$$H = \frac{p^2}{2m} \ ,$$

der $p = |\mathbf{p}|$ er impulsen. Hamiltonfunksjonen for gassen er da

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \ .$$

Partisjonsfunksjonen er da

$$Z_N = \frac{1}{h^{3N} N!} \int e^{-\beta H(p,x)} \ d^3 p_1 \ldots d^3 x_N \ .$$

Vi har delt på $N!$ fordi partiklane ikkje er skillbare. Det er og ein faktor h^3 per partikkel for å gjere Z_N dimensjonslaus. Vi har da

$$Z_N = \frac{Z^N}{N!} \ ,$$

der Z er partisjonsfunksjonen for ein partikkel

$$Z = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} \ d^3 p \, d^3 x \ ,$$

Dette gjev

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \ dp \\
&= V \left(\frac{2m\pi}{h^2 \beta} \right)^{3/2} \ .
\end{aligned}$$

Innsetting gjev

$$Z_N = \underline{\underline{\frac{V^N}{N!}\left(\frac{2m\pi}{h^2\beta}\right)^{3N/2}}} .$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} P &= k_B T \frac{\partial \ln Z_N}{\partial V} \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial V}\left[N \ln V + ...\right] \\ &= k_B T \frac{N}{V} . \end{aligned}$$

Eller

$$PV = \underline{\underline{N k_B T}} .$$

c) Den storkanoniske partisjonsfunskjonen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N}\left(\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\Lambda^{3N}}\right) \\ &= e^{e^{\beta\mu} V/\Lambda^3} , \end{aligned}$$

der $\Lambda^2 = h^2/2\pi m k_B T$. Vi har

$$P(N) = \frac{1}{\Theta} e^{\beta\mu N} Z_N$$

Midlere partikkeltal $\langle N\rangle$ er

$$\begin{aligned} \langle N\rangle &= k_B T \frac{\partial \ln \Theta}{\partial \mu} \\ &= \frac{e^{\beta\mu} V}{\Lambda^3} . \end{aligned}$$

Dette gjev

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{e^{-\beta\mu N}\langle N\rangle^N}{N!} , \\ \Theta &= e^{\langle N\rangle} . \end{aligned}$$

Innsett får ein då

$$P(N) = \underline{\underline{\frac{e^{-\langle N\rangle} N^{\langle N\rangle}}{N!}}} .$$

Dette er ei Poissonfordeling med parameter $t = \langle N\rangle$.

d)

$$\frac{PV}{k_BT} = \ln\Theta$$
$$= \frac{e^{\beta\mu}V}{\Lambda^3} .$$

Dette gjev

$$PV = \underline{\underline{\langle N\rangle k_BT}} .$$

Dette er ideell gasslov med $N \to \langle N\rangle$. For $\langle N\rangle \gg 1$ er fluktuasjonane i N neglisjerbare og ein får same oppførsel som i kanonisk ensemble.

Oppgåve 4

a) La $f_{ii}^{(n)}$ vere sannsyna for at systemet kjem tilbake til tilstand i for fyrste gong etter n steg. La

$$f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} .$$

Dersom $f_{ii}^* = 1$ er tilstanden i rekurrent. Viss $f_{ii}^* < 1$ er tilstanden i transient.

b) Trykket til ein Fermigass ved $T = 0$ er større enn null. Dette i motsetnad til ein klassisk gass der tilstandslikninga er $P = \rho k_BT$ og der $P = 0$ for $T = 0$. Kvantetrykket er ein konsekvens av Pauliprinsippet, som seier at identiske fermion ikkje kan vere i same kvantetilstand. Dette trykket er altså ein kvantemekanisk effekt. Derav namnet. Det er to krefter som gjer at stjerna er i hydrostatisk likevekt: Gravitasjonskrafta som verkar innover og kvantetrykket som verkar utover. Gravitasjonskrafta er dominert av bidraget frå protonar/nøytronar i stjerna, medan elektrongassen gjev det dominerande bidraget til kvantetrykket.

c) Vi skriv Z om til eit integral

$$Z = \int_0^{\infty} (2l+1)e^{-l(l+1)\Theta_R/T} ,$$

sidan l essensielt er ein kontinuerleg variabel. Sett $y = (\Theta_R/T)l(l+1)$. Dette gjev

$$Z = \frac{T}{\Theta_R}\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy$$
$$= \underline{\underline{\frac{T}{\Theta_R}}} .$$

Den midlere energien blir da

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}$$
$$= \underline{\underline{k_BT}} .$$

d) Vi har

$$\frac{P}{k_BT} = -\frac{1}{\hbar^d}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\ln\left[1-e^{-\beta p^n}\right] .$$

Integrasjon over vinklane gjev

$$\frac{P}{k_BT} = -\frac{1}{\hbar^d}\frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}\int_0^\infty \ln\left[1-e^{-\beta p^n}\right]p^{d-1} .$$

Delvis integrasjon med $f' = p^{d-1}$ og $g(p) = \ln\left[1-e^{-\beta p^n}\right]$, gjev

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{p^d}{d} , \\ g'(p) &= -\frac{\beta}{e^{\beta p^n}-1}np^{n-1} . \end{aligned}$$

Trykket blir difor

$$P = \frac{n}{d}\frac{1}{\hbar^d}\frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}\int_0^\infty \frac{p^{d+n-1}}{e^{\beta p^n}-1} .$$

Energitettleiken blir etter integrasjon over vinklane

$$\frac{\langle E\rangle}{V} = \frac{1}{\hbar^d}\frac{2^{1-d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}\int_0^\infty \frac{p^{d+n-1}}{e^{\beta p^n}-1} .$$

Altså er

$$P = \frac{n}{d}\frac{\langle E\rangle}{V} .$$