NTNU

Fakultet for Naturvitskap og Teknologi

Institutt for Fysikk

Løysingsframlegg kontinuasjonseksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk 15/8 2009

Faglærar: Professor Jens O. Andersen

Institutt for Fysikk, NTNU

August 19, 2009

Oppgåve 1

Sannsyna for at det er N partiklar i systemet er

$$P(N) = \frac{e^{\beta\mu N}}{\Theta} Z_N \, .$$

Midlere partikkeltal bir da

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle &= \frac{1}{\Theta} \sum_{N=0}^{\infty} N e^{\beta\mu N} Z_N \\
&= \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial\mu} \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial\mu} \Theta \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial\mu} \ln\Theta}} \, .
\end{aligned}$$

For å rekne ut fluktuasjonane treng vi middelverdien $\langle N^2 \rangle$. Vi har

$$\begin{aligned}
\langle N^2 \rangle &= \frac{1}{\Theta} \sum_{N=0}^{\infty} N^2 e^{\beta\mu N} Z_N \\
&= \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial\mu^2} \, .
\end{aligned}$$

Fluktuasjonane er gitt ved

$$
\begin{aligned}
(\Delta N)^2 &= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \\
&= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{1}{\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \mu}\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\langle N \rangle}} \ .
\end{aligned}
$$

Oppgåve 2

1) Partisjonsfunksjonen finnast ved å summere over spinna. Vi skriv

$$
\begin{aligned}
Z_N &= \sum_{s_1=\pm 1}\sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \dots s_{N-1} s_N)} \\
&= \left(\sum_{s_2=\pm 1}\sum_{s_3=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J(s_2 s_3 + \dots s_{N-1} s_N)}\right) \sum_{s_1=\pm 1} e^{\beta J s_1 s_2} \ .
\end{aligned}
$$

Vi summerer først over s_1. Dette gjev:

$$
Z_N = \left(\sum_{s_2=\pm 1}\sum_{s_3=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J(s_2 s_3 + \dots s_{N-1} s_N)}\right)\left(e^{\beta J s_2} + e^{-\beta J s_2}\right) \ .
$$

Leddet i parantesen er lik $2\cosh(\beta J)$ uavhengig av verdien på s_2. Dette gjev:

$$
Z_N = 2\cosh(\beta J)\left(\sum_{s_2=\pm 1}\sum_{s_3=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\beta J(s_2 s_3 + \dots s_{N-1} s_N)}\right) \ .
$$

Summen over $s_2 \dots . s_N$ er lik partisjonsfunksjonen for Ising modellen med $N-1$ spinn. Vi får da flg. rekursjonsformel:

$$
Z_N = 2\cosh(\beta J) Z_{N-1} \ .
$$

Vi bruker rekursjonsformelen $N-1$ ganger og får:

$$
Z_N = 2^{N-1}\cosh^{N-1}(\beta J) Z_1 \ .
$$

Partisjonsfunksjonen til Isingmodellen med eitt spinn er $Z_1 = 2$. Dette gjev:

$$
Z_N = \underline{\underline{2^N \cosh^{N-1}(\beta J)}} \ .
$$

2) For kvar spinnkonfigurasjon $\{s_i\}$ med energi $E = H(\{s_i\})$, er det ein spinkonfigurasjon med same energi, der alle spinna peikar i motsett retning. Desse to konfigurasjonane er like sannsynlege og midlere spinn må da bli null.

3) Kvart spin er ein paramagnet som vekselverkar med det ytre magnetfeltet B. Proporsjonalitetskonstanten μ er det magnetiske momentet. Vi har da:

$$H_B \;=\; \underline{\underline{-\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i}}\;.$$

Oppgåve 3

La $f_{ii}^{(n)}$ vere sannsyna for at systemet kjem tilbake til tilstand i for fyrste gong etter n steg. La

$$f_{ii}^{*} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}\;.$$

Dersom $f_{ii}^{*} = 1$ er tilstanden i rekurrent. Viss $f_{ii}^{*} < 1$ er tilstanden i transient.

Oppgåve 4

1) I det klassiske tilfellet er det fire moglege tilstandar: $(-\epsilon, -\epsilon)$, $(-\epsilon, \epsilon)$, $(\epsilon, -\epsilon)$ og (ϵ, ϵ). Dei tilhøyrande energiane er -2ϵ, 0, 0, og 2ϵ. Partisjonsfunksjonen blir difor

$$Z_{\mathrm{MB}} \;=\; \underline{\underline{\frac{1}{2!}\left[e^{-2\beta\epsilon} + 2 + e^{2\beta\epsilon}\right]}}\;,$$

der faktoren 2! er Gibbs' korreksjonsfaktor for to partiklar.

I tilfellet med Bose-Einstein statistikk har vi tre moglege tilstandar: $(-\epsilon, -\epsilon)$, $(-\epsilon, \epsilon) + (\epsilon, -\epsilon)$, og (ϵ, ϵ). Dei tilhøyrande energiane er -2ϵ, 0, og 2ϵ. Partisjonsfunksjonen blir difor

$$Z_{\mathrm{BE}} \;=\; \underline{\underline{\left[e^{-2\beta\epsilon} + 1 + e^{2\beta\epsilon}\right]}}\;,$$

I tilfellet med Fermi-Dirac statistikk har vi ein mogleg tilstand: $(-\epsilon, \epsilon) - (\epsilon, -\epsilon)$. Den tilhøyrande energien er 0. Partisjonsfunksjonen blir difor

$$Z_{\mathrm{FD}} \;=\; \underline{\underline{1}}\;,$$

2) For $T = 0$ er den midlere energien $\langle E \rangle$ lik grunntilstandsenergien. Vi får da

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_{\mathrm{MB}}^{T=0} &= \underline{\underline{-2\epsilon}} \,, \\
\langle E \rangle_{\mathrm{BE}}^{T=0} &= \underline{\underline{-2\epsilon}} \,, \\
\langle E \rangle_{\mathrm{FD}}^{T=0} &= \underline{\underline{0}} \,.
\end{aligned}$$

Oppgåve 5

Trykket til ein Bose-gass ved $T = 0$ er $P = 0$ sidan alle partiklane er i grunntilstanden med null impuls. Tilstandslikninga til ein klassisk gass er $PV = Nk_BT$. Viss $T = 0$ er $P = 0$.

Oppgåve 6

Systemet har N partiklar og difor $6N$ friheitsgradar ($3N$ koordinatar og $3N$ konjugerte impulsar). Tettheiten av mikrotilstandar ρ er analogt til partikkeltettheiten i fluidmekanikk. Da talet på kopiar av mekaniske system i eit ensemble er konstant (det er inga kjelde eller sluk) på same måte som partikkeltalet i ei væske er konstant (viss det er ikkje er kjelder eller sluk), tilfredsstiller ρ kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \,,$$

der $\mathbf{j}$ er straumtettheiten. $\mathbf{j}$ er som vanleg gitt ved $\rho\mathbf{v}$ der $\mathbf{v}$ er hastigheiten i faserommet til kopiane i ensemblet. Vi har da på komponentform $\mathbf{v} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, ..., \dot{p}_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N})$. Divergensen til straumtettheiten er

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i \right] + \rho \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] \,.
\end{aligned}$$

Hamiltons likningar er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\
\frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \,.
\end{aligned}$$

Dersom ein deriverer den første likninga partielt mop q_i og den andre partielt mop p_i, ser ein at det siste leddet i uttrykket for $\nabla \cdot \mathbf{j}$ er lik null. $\nabla \cdot \mathbf{j}$ er altså lik den eksplisitte tidsavhengigheiten til ρ (kjerneregelen!) og kontinuitetslikninga kan difor skrivast som

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \, .$$

Dersom ein nyttar definisjonen på Poissonparantesen og Hamiltons likningar kan ein skrive $\nabla \cdot \mathbf{j} = \{\rho, H\}$. Dette gjev

$$\frac{d\rho}{dt} = \underline{\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}}} \, .$$

Oppgåve 7

Lagrangefunksjonen L er ein funksjon av koordinatane q_i og dei tidsderiverte $\dot{q}_i$. Dersom ein av koordinatane ikkje opptrer *eksplisitt* i uttrykket for L, er q ein syklisk koordinat. Lagrange likning er

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \, .$$

Viss q er syklisk er høgresida lik null og integrasjon gjev da

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \underline{\underline{C}} \, ,$$

der C er ein integrasjonskonstant. Konstanten C er den bevarte storleiken.

Oppgåve 8

Hamiltonfunksjonen er

$$H(p,q) = \underline{\underline{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2}} \, .$$