Løsningsforslag til kontinuasjonseksamen august 2010

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}kx^2} \\
&= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}} \\
&= \underline{\underline{\frac{2\pi}{h}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\beta}}}
\end{aligned}
$$

Kommentar: Normalisering ved å dele med Plancks konstant h er ikke nødvendig for å få riktig svar i resten av oppgaven, men det gjør Z dimensjonsløs. Det er lettest å se ved å skrive om Z på formen (bruker $beta = 1/kT$ og $\frac{k}{m} = \omega = 2\pi f$)

$$
Z = \frac{kT}{hf}
$$

der f er frekvensen til den harmoniske oscillatoren. Både kT og hf har dimensjon energi (Joule i SI-enheter), så Z er dimensjonsløs.

b)

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \\
&= -\frac{\partial}{\partial\beta}(\text{konst.} - \ln\beta) \\
&= \frac{1}{\beta} \\
&= \underline{\underline{kT}}
\end{aligned}
$$

$$
C_{\mathrm{V}} = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \underline{\underline{k}}
$$

c) Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i Hamiltonfunksjonen bidrar med en faktor $\frac{1}{2}kT$ til den midlere energien $\langle E \rangle$. I vårt tilfelle består Hamiltonfunksjonen av to kvadratiske ledd (og ikke mer!), så midlere energi skal i følge ekvipartisjonsprinsippet være

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = \underline{\underline{kT}}$$

som var det vi fant i deloppgave b).

d)

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta E_n} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\beta\hbar\omega} \\ &= \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}}} \end{aligned}$$

Kommentar: Partisjonsfunksjonen kan alternativt uttrykkes ved en hyperbolsk sinusfunksjon:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{2\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \\ &= \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\hbar\omega\coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}} \end{aligned}$$

Eventuelt kan man skrive dette som:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{V}} &= \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} \\ &= \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} \\ &= -k\beta^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\hbar\omega k\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \\ &= \underline{\underline{k\frac{(\beta\hbar\omega/2)^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}}} \end{aligned}$$

f) Lavtemperaturgrensa, $T \to 0$ eventuelt $\beta \to \infty$:

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1} \\ &\approx \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{V}} &= \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} \\ &\approx \hbar\omega\frac{\partial}{\partial T}\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \\ &= \underline{\underline{k\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}} \end{aligned}$$

Kommentar: $\langle E\rangle \to \frac{1}{2}\hbar\omega$ når $T \to 0$, mens varmekapasiteten går mot null.

g) Høy temperatur, $\beta\hbar\omega \ll 1$:

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega\coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \\ &= kT\left[\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)\right] \end{aligned}$$

Bruker så (se feks Rottmann):

$$x \coth x = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \qquad\qquad x^2 < \pi^2$$

og får

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= kT\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)^2 + \mathcal{O}(\beta^4\hbar^4\omega^4)\right] \\
&\approx \underline{\underline{kT\left[1 + \frac{\hbar^2\omega^2}{12k^2T^2}\right]}}
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
C_\mathrm{V} &= \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} \\
&\approx \underline{\underline{k\left[1 - \frac{\hbar^2\omega^2}{12k^2T^2}\right]}}
\end{aligned}$$

h) Se figur 1.

i) Frihetsgrader som ikke bidrar til varmekapasiteten ved en gitt temperatur sier vi er *frosset ut*.

Oppgave 2

a) Åtte mulige spinnkonfigurasjoner:

$$\underline{\underline{(\uparrow\uparrow\uparrow)}},\ \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\uparrow)}},\ \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\uparrow)}},\ \underline{\underline{(\uparrow\uparrow\downarrow)}},\ \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\uparrow)}},\ \underline{\underline{(\downarrow\uparrow\downarrow)}},\ \underline{\underline{(\uparrow\downarrow\downarrow)}},\ \underline{\underline{(\downarrow\downarrow\downarrow)}}$$

med tilhørende energier:

$$\underline{\underline{\epsilon_1 = 0}},\ \underline{\underline{\epsilon_2 = 2J}},\ \underline{\underline{\epsilon_3 = 0}},\ \underline{\underline{\epsilon_4 = -2J}},\ \underline{\underline{\epsilon_5 = -2J}},\ \underline{\underline{\epsilon_6 = 0}},\ \underline{\underline{\epsilon_7 = 2J}},\ \underline{\underline{\epsilon_8 = 0}},$$

b) Partisjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{i=0}^{8} \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i} \\
&= 4 + 2\,\mathrm{e}^{2\beta J} + 2\,\mathrm{e}^{-2\beta J} \\
&= 8\left(\frac{\mathrm{e}^{\beta J} + \mathrm{e}^{-\beta J}}{2}\right)^2 \\
&= \underline{\underline{8\cosh^2(\beta J)}}
\end{aligned}$$

c) Midlere energi:

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\
&= -2\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \cosh(\beta J) \\
&= -2\frac{J \sinh(\beta J)}{\cosh(\beta J)} \\
&= \underline{\underline{-2J \tanh(\beta J)}}
\end{aligned}
$$

Grensa $T \to 0$, eller ekvivalent $\beta \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle &= -2J \lim_{\beta \to \infty} \tanh(\beta J) \\
&= -2J \lim_{\beta \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{\beta J} - \mathrm{e}^{-\beta J}}{\mathrm{e}^{\beta J} + \mathrm{e}^{-\beta J}} \\
&= \underline{\underline{-2J}}
\end{aligned}
$$

Ved $T = 0$ er systemet i grunntilstanden. Grunntilstanden har energi $-2J$.

d) Korrelasjonsfunksjonen:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{13} &= \langle s_1 s_3 \rangle \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} s_1 s_3 \, \mathrm{e}^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} (s_1 s_2)(s_2 s_3) \, \mathrm{e}^{\beta J(s_1 s_2 - s_2 s_3)} \\
&= \underline{\underline{-\tanh^2(\beta J)}}
\end{aligned}
$$

Grensa $T \to 0$, eller $\beta \to \infty$:

$$
\lim_{\beta \to \infty} \tanh(\beta J) = 1
$$

som over, så

$$
\lim_{T \to 0} \langle s_1 s_3 \rangle = \underline{\underline{-1}}
$$

Systemet er i grunntilstanden når $T = 0$. Da peker s_1 opp og s_3 ned (eller omvendt), og dermed blir $ave s_1 s_3 = -1$.

Oppgave 3
I denne oppgaven skal vi studere en ideell Bosegass i d dimensjoner. Partikkeltettheten ρ er gitt ved

$$\rho = C_d \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

der C_d er en dimensjonsavhengig størrelse.

a) Det kjemiske potensialet μ må være mindre enn ε, og spesielt lavere enn *minste* enpartikkelenergi ε_1, hvis ikke kan partikkeltettheten ρ bli negativ.

b) Siden $\varepsilon_1 \approx 0$ for makroskopiske system

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{maks}} &= C_d \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1} \\
&= C_d \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\varepsilon^{(d-2)/2} \, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{1 - \, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}} \\
&= C_d \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \varepsilon^{(d-2)/2} \, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon} \\
&= C_d \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \varepsilon^{(d-2)/2} \, \mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon}
\end{aligned}$$

Substituerer $t = \beta\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{maks}} &= C_d (kT)^{d/2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{d/2}} \int_0^\infty \mathrm{d}t \, t^{d/2-1} \, \mathrm{e}^{-t} \\
&= \underline{\underline{C_d (kT)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

c) Kritisk temperatur:

$$\rho = C_d (kT_c)^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)$$

Løst for T_c:

$$T_c = \underline{\underline{\frac{\rho^{2/d}}{k \left[C_d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \zeta\left(\frac{d}{2}\right)\right]^{2/d}}}}$$

d) Riemanns zeta-funksjon definert ved summen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

er bare gyldig når $s > 1$, det vil si at summen divergerer når $d = 1$ og $d = 2$ og gir $T_c = 0$. Resultatet vårt i deloppgave c) gir dermed at vi får Bose-Einstein–kondensasjon når $d = 3$, men ikke lavere.

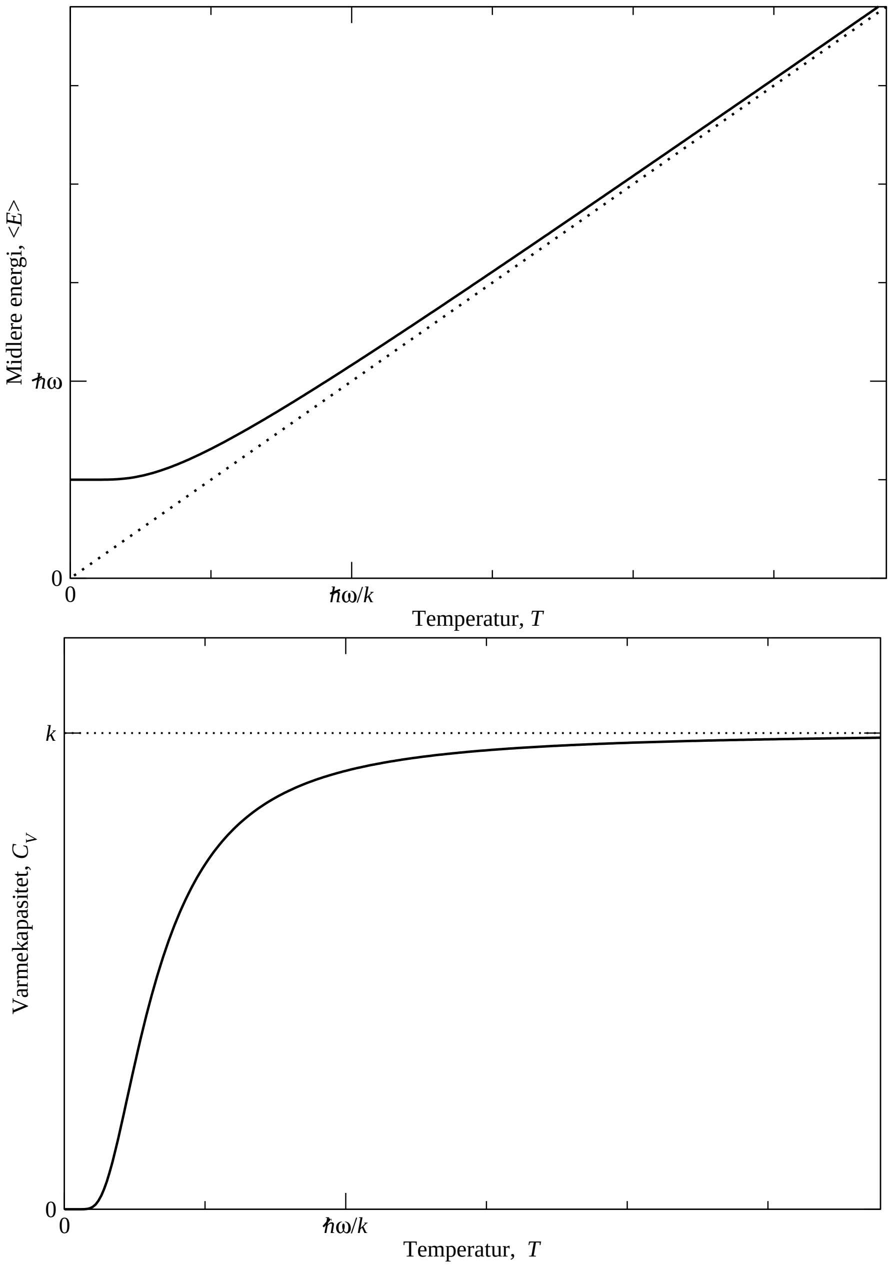
Midlere energi, <E>
ħω
0
0
ħω/k
Temperatur, T
Varmekapasitet, C_V
k
0
0
ħω/k
Temperatur, T

Figure 1: