UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Arne Slotte
Telefon: 3647

Eksamen i fag 74316 Elektromagnetisk teori
Onsdag 22. mai 1991
Tid: 09.00–13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*
Barnett og Cronin, *Mathematical Formulae*

Hvert delspørsmål teller likt. En del formler du kanskje får bruk for er samla i et vedlegg til oppgaven.

Oppgave 1:

Gitt Maxwell's likninger i vakum

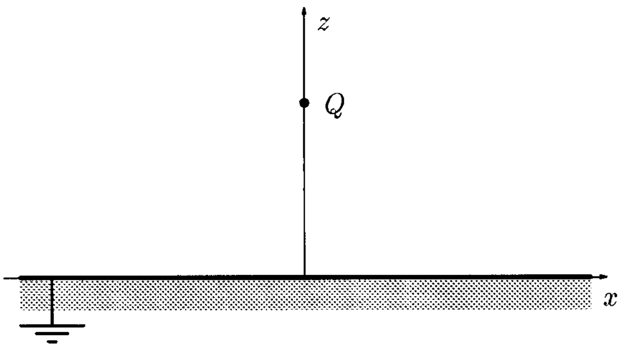
$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} &= \mu_0 \vec{\jmath}
\end{aligned}
$$

Skriv opp de makroskopiske Maxwell likningene, og forklar hva som er sammenhengen mellom størrelsene i vakumlikningene og de makroskopiske likningene.
Kan du si noe om gyldighetsområdet for de makroskopiske likningene?

Oppgave 2:

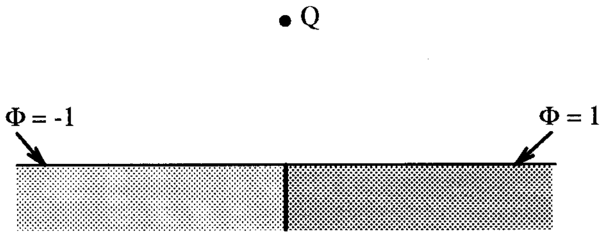
a) Forklar hvordan en kan løse et potensialproblem med randbetingelser ved hjelp av speil-ladninger.

b) Ei punktladning Q er plassert i punktet $(0, 0, z_q)$ over en uendelig plan jorda metallisk leder (planet er gitt ved $z = 0$), som vist under



Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet over planet.

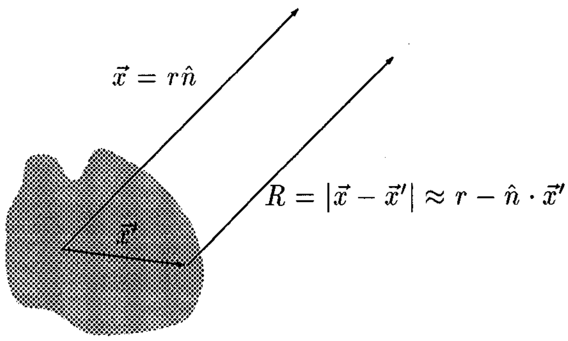
c) Gitt ei ladnings og potensialfordeling som vist under:



Ei punktladning Q er plassert i punktet $(0, 0, z_q)$ over et uendelig plan gitt ved $z = 0$. Planet består av to ulike metaller som holdes på potensial $\Phi = -1\,V$ for $x < 0$ og $\Phi = 1\,V$ for $x > 0$.
Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet over planet.

Oppgave 3:

Ei strøm- og ladnings-fordeling er lokalisert til et område omkring origo, vist som grått i figuren under



a) Forklar forskjellen på nærfelt og strålingsfelt.

b) For ei *gitt* strømfordeling, $\vec{J}(\vec{x}, t)$, er vektorpotensialet

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}', t')}{R} \delta(t - t' - \frac{R}{c})\, d^3x'\, dt'$$

Vis at for *strålingsfeltet* så kan den fouriertransformerte til vektorpotensialet, definert ved

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, d\omega$$

uttrykkes som

$$\vec{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\vec{I}(\hat{n},\omega)$$

med

$$\vec{I}(\hat{n},\omega) = \int \vec{\jmath}(\vec{x}',\omega)\mathrm{e}^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{x}')}\, d^3x'$$

Her er $k = \omega/c$, og $\vec{\jmath}(\vec{x},\omega)$ er den fouriertransformerte strømfordelinga.

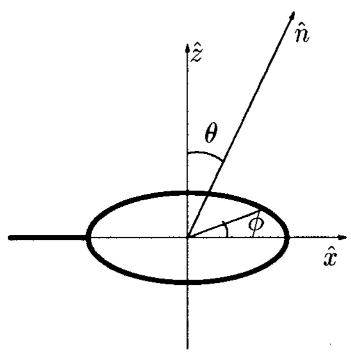
c) Hva er dipolapproksimasjonen (Elektrisk dipolstråling)? Når er dipolapproksimasjonen god?

d) Det oppgis at det for *strålingsfeltet* er følgende sammenheng mellom magnetisk induksjon, $\vec{B}(\vec{x},\omega)$, og elektrisk felt, $\vec{E}(\vec{x},\omega)$

$$\vec{E}(\vec{x},\omega) = -c\,\hat{n}\times\vec{B}(\vec{x},\omega)$$

Ei sirkulær antenne med radius r_0 ligger i (x,y)-planet, og eksiteres med en enkelt frekvens, ω_0, slik at strømfordelinga er

$$\vec{\jmath}(\rho,\theta,\phi,\omega) = \frac{\pi I_0}{r_0}\delta(\rho - r_0)\delta(\theta - \frac{\pi}{2})\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)\hat{\mathrm{e}}_\phi$$



Her har vi brukt polarkoordinater for å forenkle skrivemåten, og $\hat{\mathrm{e}}_\phi$ er en enhetsvektor i ϕ-retninga.

Finn strålingsfeltet ($\vec{E}(r,t)$, $\vec{B}(r,t)$ og midlere energistrøm per romvinkelenhet, $\mathcal{U}(\hat{n})$).

Tips: Velg koordinatsystem slik at $\hat{z}$, $\hat{n}$ og $\hat{x}$ ligger i samme plan, og husk at $\vec{I}$ er en vektor slik at x-, y- og z-komponentene må beregnes hver for seg.

Oppgave 4:

a) Forklar det fysiske innholdet i likninga

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

Hvordan transformerer denne likninga ved Lorentz-transformasjoner?

b) En rett leder med tverrsnittsareal A har ei homogen fordeling av positivt lada partikler som er i ro i lederens hvilesystem, K. I tillegg går det en jevn strøm av negative partikler i en og samme retning med hastighet $\vec{u}$. Ladningene har størrelse $\pm e$, og konsentrasjonene er gitt ved henholdsvis n_+ og n_-. En observatør beveger seg med hastighet $\vec{v}$ paralellt med lederen. Hvilken ledningsstrøm ser observatøren?

c) Gitt felttensoren

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Finn kontraksjonen $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ uttrykt ved $\vec{E}$ og $\vec{B}$.

Vedlegg 1: En del formler som kanskje er nyttige:

Integraler:

$$\int \frac{u\,du}{a^2+u^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+u^2) + \text{Konstant}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{u}{a}) + \text{Konstant}$$

$$\int_0^\infty (u^2+a)^{-3/2}\,du = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix\cos\phi}\cos\phi\,d\phi = i2\pi J_1(x)$$

Løsning av Laplace's likning i kulekoordinater:

$$X(\rho,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}\rho^l + B_{lm}\rho^{-(l+1)}\right]P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$$

Potensialproblem med Neumann randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) - \langle\Phi\rangle_S = \int_V G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon}\,d^3x' + \int_S G_N(\vec{x},\vec{x}')\nabla_{x'}\Phi(\vec{x}')\cdot d\vec{S}$$

Potensialproblem med Dirichlet randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon}\,d^3x' - \int_S \Phi(\vec{x}')\nabla_{x'}G_D(\vec{x},\vec{x}')\cdot d\vec{S}$$

Fouriertransformasjonen:

$$\begin{aligned} F(\vec{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int F(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega \\ F(\vec{x},\omega) &= \int F(\vec{x},t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \end{aligned}$$

Volumelement i ulike koordinatsystemer:

Kartesiske:	$dV = dx\,dy\,dz$
Sylinderkoordinater:	$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$
Polarkoordinater:	$dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi$