UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Arne Slotte
Telefon: 3647

Eksamen i fag 74316 Elektromagnetisk teori
Mandag 12. august 1991
Tid: 09.00–13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*
Barnett og Cronin, *Mathematical Formulae*

Hvert delspørsmål teller likt. En del formler du kanskje får bruk for er samla i et vedlegg til oppgaven.

Oppgave 1:

Gitt Maxwell's likninger i vakum

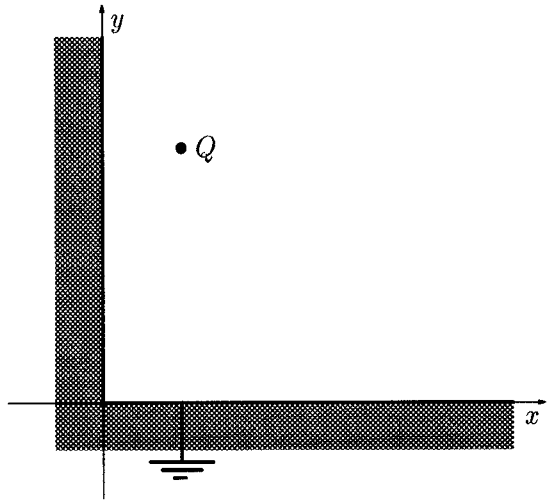
$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} &= \mu_0 \vec{j}
\end{aligned}$$

Skriv opp de makroskopiske Maxwell likningene, og forklar hva som er sammenhengen mellom størrelsene i vakumlikningene og de makroskopiske likningene.
Kan du si noe om gyldighetsområdet for de makroskopiske likningene?

Oppgave 2:

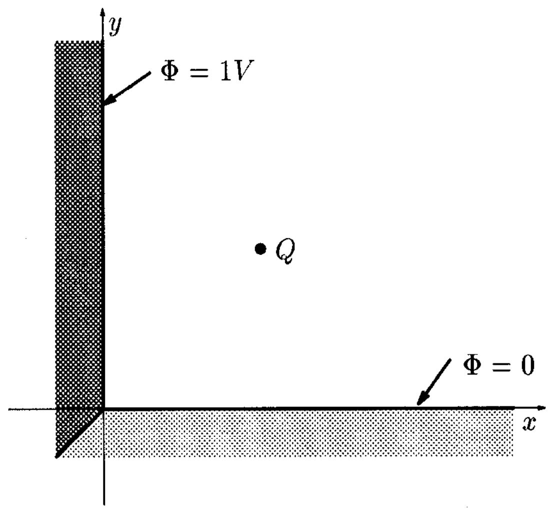
a) Forklar hvordan en kan løse et potensialproblem med randbetingelser ved hjelp av speilladninger.

b) Ei punktladning Q er plassert i punktet (x_q, y_q, z_q) i vakum nær et hjørne i en jorda metallisk leder som vist i figuren under (De to metalliske veggene er definert ved $x = 0$ og $y = 0$).



Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet utafor lederen (området $x > 0$ og $y > 0$).

c) Gitt ei ladnings og potensialfordeling som vist under:



Ei punktladning Q er plassert i punktet $(a, a, 0)$ i et område begrensa av to plane matalliske vegger definert ved $x = 0$ og $y = 0$. De to veggene holdes på ulike potensialer. $\Phi = 1V$ for $x < 0$ og $\Phi = 0$ for $y < 0$.
Beregn det elektrostatiske potensialet i rommet utafor metallene.

Oppgave 3:

a) Forklar hva *dispersjon* er, og angi kort noen fysiske konsekvenser av dispersjon.

b) Ei væske består av ρ_N identiske molekyler per volumenhet. I null elektrisk felt har ikke disse molekylene noe dipolmoment, men vi kan tenke oss at de inneholder to relativt frie elektroner bundet i hvert sitt harmoniske potensial med karakteristiske frekvenser ω_1 og ω_2, og dempningskonstanter γ_1 og γ_2. Likninga for avviket fra middelposisjonen, x, til ei ladning e med masse m bundet av et harmonisk potensial med karakteristisk frakvens ω_i og dempningskonstant γ_i er

$$m\left(\ddot{x} + \gamma_i\dot{x} + \omega_i^2 x\right) = e\vec{E}(x,t)$$

Vis at permittiviteten (dielektrisitetskonstanten) til væska, $\epsilon(\omega)$, er gitt ved

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\left(1 + \omega_p^2\left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2 - i\gamma_2\omega}\right)\right)$$

hvor

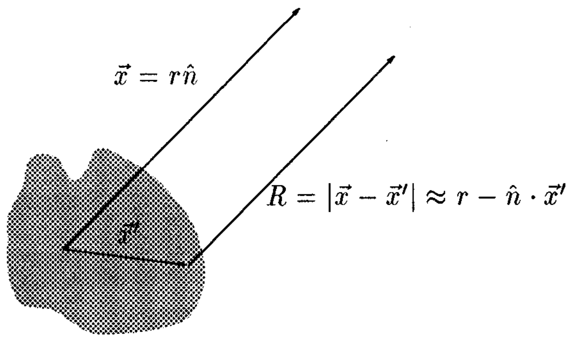
$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_N e^2}{\epsilon_0 m}}$$

er plasmafrekvensen, e er elektronladninga og m er elektronmassen.

c) Hva menes med *ressonant absorbsjon*? Forklar når vi har ressonant absorbsjon i væska i punkt b.

Oppgave 4:

Ei strøm- og ladnings-fordeling er lokalisert til et område omkring origo, vist som grått i figuren under



a) Forklar forskjellen på nærfelt og strålingsfelt.

b) For ei *gitt* strømfordeling, $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$, er vektorpotensialet

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}',t')}{R}\delta(t - t' - \frac{R}{c})\, d^3x'\, dt'$$

Vis at for *strålingsfeltet* så kan den fouriertransformerte til vektorpotensialet, definert ved

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, d\omega$$

uttrykkes som

$$\vec{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\vec{I}(\hat{n},\omega)$$

med

$$\vec{I}(\hat{n},\omega) = \int \vec{\jmath}(\vec{x}',\omega)\mathrm{e}^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{x}')}\, d^3x'$$

Her er $k = \omega/c$, og $\vec{\jmath}(\vec{x},\omega)$ er den fouriertransformerte strømfordelinga.

c) Hva er dipolapproksimasjonen (Elektrisk dipolstråling)? Når er dipolapproksimasjonen god?

Oppgave 5:

a) Det elektromagnetiske potensialet (4-potensialet) tilfredstiller likninga

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = \mu_0 J^\beta \tag{1}$$

Hva er justerbetingelsen på potensialet?

b) Forklar det fysiske innholdet i likningene

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \tag{2}$$

og

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \tag{3}$$

Hvordan transformerer disse likningene ved Lorentz-transformasjoner?

c) Vis at likning 2 er en konsekvens av likninga for potensialet (likning 1), og at likning 3 følger av likning 2.

Vedlegg 1: En del formler som kanskje er nyttige:

Integraler:

$$\int \frac{u\,du}{a^2+u^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+u^2) + \text{Konstant}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{u}{a}) + \text{Konstant}$$

$$\int_0^\infty (u^2+a)^{-3/2}\,du = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix\cos\phi}\cos\phi\,d\phi = i2\pi J_1(x)$$

Løsning av Laplace's likning i kulekoordinater:

$$X(\rho,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}\rho^l + B_{lm}\rho^{-(l+1)}\right] P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$$

Potensialproblem med Neumann randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) - \langle\Phi\rangle_S = \int_V G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon}\,d^3x' + \int_S G_N(\vec{x},\vec{x}')\nabla_{x'}\Phi(\vec{x}')\cdot d\vec{S}$$

Potensialproblem med Dirichlet randbetingelser:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon}\,d^3x' - \int_S \Phi(\vec{x}')\nabla_{x'}G_D(\vec{x},\vec{x}')\cdot d\vec{S}$$

Fouriertransformasjonen:

$$\begin{aligned} F(\vec{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int F(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega \\ F(\vec{x},\omega) &= \int F(\vec{x},t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \end{aligned}$$

Volumelement i ulike koordinatsystemer:

Kartesiske:	$dV = dx\,dy\,dz$
Sylinderkoordinater:	$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$
Polarkoordinater:	$dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi$