NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Kontinuasjonseksamen SIF 4060: Elektromagnetisk teori

Lørdag 10. august, 2002
kl. 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: C - Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Rottmann: Matematische Formelsamling (alle språkutgaver)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Se også oppgitte formler side 5-8.

Oppgave 1

a) Vis at potensialet fra en uendelig linjeladning kan uttrykkes som $V = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$,

hvor λ er ladning pr. lengdeenhet, r er avstanden fra linjeladningen og r_0 er en konstant avstand.

Bestem kapasitans pr. lengdeenhet C' for en koaksialkabel hvor innerlederen har radius r_1 og ytterlederen har radius r_2 ($> r_1$). Bestem også kabelens selvinduktans pr. lengdeenhet L' når vi antar ideelle ledere, slik at $C'L' = \mu\varepsilon$, hvor μ og ε er permeabilitet og permittivitet for materialet mellom de to lederne.

Gi tallsvar for $r_1 = 0.5$ mm, $r_2 = 4$ mm, $\mu = \mu_0$ og $\varepsilon = 2\varepsilon_0$.

b) Koaksialkabelen over utgjør en elektrisk transmisjonslinje.

Tegn opp ekvivalentskjema for et infinitesimalt stykke dx av transmisjonslinjen når de to lederne antas ideelle (null resistans). Bruk dette til å vise at strøm- og spenningsvariasjonene $I(x, t)$ og $V(x, t)$ oppfyller de koblede ligningene

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L'\frac{\partial I}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial I}{\partial x} + C'\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

og at de begge oppfyller en bølgeligning av vanlig form.

Bestem fasehastigheten uttrykt ved μ og ε. Gi tallsvar for parameterene oppgitt i a).

c) Anta at transmisjonslinjen overfører et monofrekvent signal, slik at $V(x,t) = \mathrm{Re}[V(x)\exp(-i\omega t)]$ og $I(x,t) = \mathrm{Re}[I(x)\exp(-i\omega t)]$, hvor $V(x)$ og $I(x)$ er komplekse spennings- og strømamplituder.
Hvilke ligninger oppfylles av $V(x)$ og $I(x)$?
Hvordan defineres bølgetallet k og bølgeimpedansen z_0?

d) Signalet ovenfor overføres fra en signalkilde til en mottaker.
Hvordan må mottakerens innngangsimpedans velges dersom vi skal unngå at signalet reflekteres tilbake fra mottakeren? Gi tallverdier for de gitte parameterene.
Under hvilke betingelser kan vi kan neglisjere bølgeforplantningen i transmisjonslinjen og bruke vanlig kretsteori til å beskrive signaloverføringen (dvs. anta at $V(x)\approx V(0)$ og $I(x)\approx I(0)$ langs hele linjen)?

Oppgave 2

a) Vi antar at vi har en statisk ladningstetthet $\rho(\mathbf{r})$ i fritt rom (vakuum).

Hvilke differensialligninger oppfyller elektrisk felt $\mathbf{E}$ og skalarpotensialet V? Skriv dem ned.

Anta at en total ladning Q er jevnt fordelt i en kule med radius R. Bestem det elektriske feltet $\mathbf{E}$ og den totale elektriske energien

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{hele}\\ \text{rommet}}} E^2 d\tau$$

for denne ladningsfordelingen.

b) Bestem potensialet V for ladningsfordelingen i a). Bruk resultatet til å beregne elektrisk energi ved bruk av formelen

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau ,$$

hvor ρ er ladningstettheten. Sammenlign med resultatet i a).

c) Det forutsettes kjent at

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{\imath}\rho(\mathbf{r}')d\tau' ; \text{ hvor } \imath = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| ,$$

og at

$$\frac{1}{\imath} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^m P_m(\cos\theta') ,$$

hvor de første Legendrepolynomene er: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$, ..osv., og θ' er vinkelen mellom vektorene $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$.

Vis hvordan potensialet fra ladningsfordelingen $\rho(\mathbf{r})$ kan representeres ved en multipolutvikling.

Skriv opp uttrykk for monopol- og dipolleddene, og vis at dipolleddet kan uttrykkes som:

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \text{ hvor } \mathbf{p} \text{ er dipolmomentet.}$$

d) Forklar hvordan man kan bruke speilingsmetoden til å løse elektrostatiske problemer.

En punktladning q er plassert på z aksen i avstand a over et uendelig stort, ledende plan i $z = 0$. Beregn potensialet og alle komponentene av det elektriske feltet for avstander $r >> a$ i halvrommet $z \geq 0$.

Oppgave 3

a) Ta utgangspunkt i Maxwells ligninger på differensiell form (se oppgitte formeler) og skriv ned, eller utled, de tilhørende ligningene på integralform.

Hvilke grensebetingelser tilfredsstiller **E**, **B**, **D** og **H** ved grenseflaten mellom to materialer uten frie ladninger?
Vis at ladningsbevarelsen følger direkte av Maxwell's ligninger.

b) Vis at man ved å innføre skalarpotensialet V og vektorpotensialet **A** får to av Maxwells ligninger automatisk tilfredsstilt.
For en oscillerende, perfekt, magnetisk dipol med dipolmoment $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$ er vektorpotensialet gitt ved:

$$\mathbf{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\left\{\frac{1}{r}\cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c}\sin[\omega(t-r/c)]\right\}\hat{\phi}.$$

Hvorfor kan vi her se bort fra skalarpotensialet?
Beregn elektrisk felt $\mathbf{E}(r, \theta, t)$ i bølgesonen, dvs. for så store r at vi kan se bort fra bidrag som går mot null raskere enn $1/r$ når $r \to \infty$.

c) Finn tilsvarende uttrykket for magnetfeltet $\mathbf{B}(r, \theta, t)$ og midlere Poyntings vektor $\langle \mathbf{S}(r, \theta, t) \rangle$.

d) Beregn midlere utstrålt effekt fra den magnetiske dipolen. Sammenlign med det tilsvarende uttrykket for en elektrisk dipol, $\langle P \rangle = \dfrac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$, når vi antar at $m_0 = \pi b^2 I_0 = \pi b^2 \omega q_0$, $p_0 = q_0 d$ og $d = \pi b$.

Oppgitt:

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

Maxwell's Equations

In general :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Auxiliary Fields

Definitions :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

Linear media :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lorentz force law

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Energy, Momentum, and Power

Energy : $$U = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau$$

Momentum : $$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, d\tau$$

Poynting vector : $$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Larmor formula : $$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

ϵ_0	$= 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$	(permittivity of free space)
μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$	(permeability of free space)
c	$= 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m}/s$	(speed of light)
e	$= 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$	(charge of the electron)
m	$= 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$