NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen TFY 4240: Elektromagnetisk teori

Onsdag 3. desember, 2003
kl. 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: C - Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Se også oppgitte formler side 5-8.

Sensur: 5. januar 2004

[Der svaret er oppgitt kreves det at utledningene gjennomføres skikkelig, og at det klart fremgår om en størrelse er en vektor eller skalar.]

Oppgave 1

a) Vis at Maxwells ligninger medfører at ladningen er bevart.

I ledende materialer er strømtettheten gitt som: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, hvor σ er materialets konduktivitet (ledningsevne). Anta at vi i et ledende materiale har en gitt ladningsfordeling $\rho_0(\mathbf{r})$ ved tid $t = 0$. Beregn $\rho(\mathbf{r},t)$ for $t \geq 0$, og vis at $\rho(\mathbf{r},t) \to 0$ etter kort tid.

Gi en fysisk forklaring på hvorfor man ikke finner frie ladninger i det indre av ledende materialer.

b) Poyntings vektor **S** og elektromagnetisk energitetthet u er gitt ved, henholdsvis,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \text{ og } u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + B^2 / \mu_0\right).$$

Vis at:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0\,.$$

[Hint: Beregn $\nabla \cdot \mathbf{S}$ ved bruk av oppgitt produktregel (6) og Maxwells ligninger.]

Forklar betydningen av denne ligningen, og av hvert av de tre leddene på venstre side.

c) Skriv opp Maxwells ligninger for et umagnetisk, ledende materiale og vis at det elektriske feltet oppfyller bølgeligningen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Denne har planbølgeløsninger av typen $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[i\left(\tilde{k}z - \omega t\right)\right]$ hvor $\tilde{k}$ er et komplekst bølgetall. Bestem dispersjonsrelasjonen ($\tilde{k}$ som funksjon av ω).

d) Vis at vi tilnærmet har

$$\tilde{k} \cong \begin{cases} \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} + i\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon}}; & \text{for } \omega >> \sigma/\varepsilon \\ (1+i)\sqrt{\dfrac{\sigma\mu_0\omega}{2}} & ; \text{for } \omega << \sigma/\varepsilon. \end{cases}$$

Bestem fasehastighet, gruppehastighet, eksponensiell dempningslengde ("skin depth") og bølgelengde for de to grensetilfellene.

Hvor stor dempning har man pr. bølgelengde når $\omega << \sigma / \varepsilon$?

Oppgave 2

I kulekoordinater, og med rotasjonssymmetri om z aksen, er den generelle løsningen av Laplaces ligning gitt ved,

$$V(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m r^m + \frac{B_m}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos\theta),$$

hvor de første Legendrepolynomene er: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$, ..osv.

Anta at en jordet, ledende kule, med radius R og sentrum i origo, er plassert i et ellers homogent elektrisk felt med potensial $V_0 = -E_0 z$. Dette uperturberte potensialet blir modifisert når kulen er tilstede.

a) Hvilke randverdier må løsningen $V(r,\theta)$ oppfylle?
Bruk disse til å vise at det resulterende potensialet er

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta .$$

b) Flateladningstettheten på en leder er gitt ved $\sigma = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial n}$.

Beregn flateladningstettheten som induseres på kulen.

c) Forklar hvordan man kan bruke speilingsmetoden til å løse elektrostatiske problemer.

En punktladning q er plassert på z aksen i avstand a over et uendelig stort, ledende plan i $z = 0$.

Bruk speilingsmetoden til å beregne potensialet i halvrommet $z \geq 0$.

d) Beregn den indusert ladningstettheten og total indusert ladning i planet $z = 0$.

Oppgave 3

a) Vis at kapasitans pr. lengdeenhet for en koaksialkabel hvor innerlederen har radius r_1 og ytterlederen har radius r_2 ($> r_1$), er gitt ved:

$$C' = \frac{\lambda}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon \Big/ \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

hvor λ er ladning pr. lengdeenhet, ΔV er potensialdifferansen mellom lederne og ε er elektrisk permittivitet til materialet mellom lederne. (Hint: Beregn felt og potensial for en linjeladning og bruk entydighetsteoremet.)

Bestem også kabelens selvinduktans pr. lengdeenhet L' når vi antar ideelle ledere, slik at $C'L' = \mu\varepsilon$, hvor μ er magnetisk permeabilitet for materialet mellom de to lederne. Gi tallsvar for $r_1 = 0.5$ mm, $r_2 = 4$ mm, $\mu = \mu_0$ og $\varepsilon = 2\varepsilon_0$.

b) Koaksialkabelen over utgjør en elektrisk transmisjonslinje.
Tegn opp ekvivalentskjema for et infinitesimalt stykke dx av transmisjonslinjen når de to lederne antas ideelle (null resistans). Bruk dette til å vise at strøm- og spennings-variasjonene $I(x, t)$ og $V(x, t)$ oppfyller de koblede ligningene

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L'\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x} + C'\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

og at de begge oppfyller en bølgeligning av vanlig form.

c) Anta at transmisjonslinjen overfører et monofrekvent signal

$$V(x,t) = \mathrm{Re}\left[V(x)\exp(-i\omega t)\right] \text{ og } \quad I(x,t) = \mathrm{Re}\left[I(x)\exp(-i\omega t)\right],$$

hvor $V(x)$ og $I(x)$ er komplekse spennings- og strømamplituder.
Hvilke ligninger oppfyller disse?
Bestem fasehastigheten og bølgeimpedansen z_0 for en bølge $V^+(x)$ og $I^+(x)$ som forplantes i $+x$ retning. Gi tallsvar for parameterene oppgitt i a).
Hva er impedansen for en bølge $V^-(x)$ og $I^-(x)$ i $-x$ retning?

d) Med refleksjon fra enden av linjen har vi bølger i begge retninger:
$V(x) = V^+(x) + V^-(x)$ og $I(x) = I^+(x) + I^-(x)$.

Vis at totalimpedansen er $Z(x) \equiv \dfrac{V(x)}{I(x)} = z_0\dfrac{1+\rho(x)}{1-\rho(x)}$, hvor z_0 er bølgeimpedansen og

$\rho(x) = \dfrac{V^-(x)}{V^+(x)} = -\dfrac{I^-(x)}{I^+(x)}$ er en lokal refleksjonskoeffisient.

Finn refleksjonskoeffisienten ved enden av linjen uttrykt ved lastimpedansen Z_{last} og bølgeinpedansen z_0. Gi tallsvar for Z_{last}=100Ω og parameterene oppgitt ovenfor.

Oppgitt:

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

Maxwell's Equations

In general :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Auxiliary Fields

Definitions :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

Linear media :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lorentz force law

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Energy, Momentum, and Power

Energy : $U = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau$

Momentum : $\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, d\tau$

Poynting vector : $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

Larmor formula : $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2} \quad \text{(permittivity of free space)}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2} \quad \text{(permeability of free space)}$$

$$c = 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \quad \text{(speed of light)}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad \text{(charge of the electron)}$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad \text{(mass of the electron)}$$

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$