NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Ola Hunderi, tlf. 93411 (mobil: 95143671)

Eksamen TFY 4240: Elektromagnetisk teori

Torsdag 1 desember 2005

kl. 09.00-13.00

Bokmål

Tillatte hjelpemidler: C .

Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

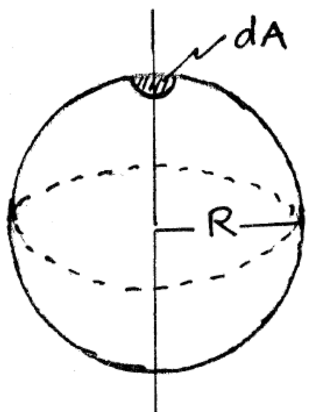
Typegodkjent kalkulator, tomt minne i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Se også oppgitte formler side 6-9.

Oppgavene er utarbeidet av:

Ola Hunderi Jon Andreas Støvneng

Oppgave 1



a) En sfærisk vanndråpe har radius $R=5\cdot 10^{-4}$ cm. Dråpen har en overflateladning med jevn tetthet σ. Betrakt et element av overflaten dA (se figuren). Dette elementet utsettes for en kraft fra de resterende overflateladningene. Feltet i selve overflaten er lik middelverdien av feltet like utenfor og like innenfor overflaten. Gi en begrunnelse for at dette er tilfelle. Bruk så Gauss lov til å beregne feltet i overflaten og vis at kraften på dA er gitt av:

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA$$

b) En vanndråpe trekkes sammen på grunn av sin overflatespenning. Denne overflatespenningen fører til et overtrykk inne i dråpen gitt av $\delta p = 2\alpha / R$ der α er overflatespenningen og R dråpens radius. Vis at den totale ladning som skal til for at overtrykket fra overflatespenninga skal oppheves av "trykket" fra de elektriske kreftene er gjeven av:

$$Q = 8\pi R\sqrt{\alpha\varepsilon_0 R}$$

Beregn verdien av Q.

Oppgitt $\alpha=73\cdot 10^{-3}$ N/m

c) En kule av et dielektrisk materiale plasseres i et homogent ytre elektrisk felt. De positive ladningene vil da forskyves i forhold til de negative, vi får indusert en polarisasjon i materialet. Vi skal beregne feltet fra den induserte polarisasjon inne i kula. Det kan enklest gjøres ved å betrakte de resulterende overflateladningene som en sum av ladningene fra to kuler, en med positiv ladningstetthet, den andre med like stor negativ ladningstetthet, og der den ene kula er forskjøvet en liten distanse d i forhold til den andre. Bruk Gauss lov til å beregne feltet inne i de overlappende kulene og vis på grunnlag av dette at feltet inne i den dielektriske kula fra den induserte polarisasjon er gitt av

$$\overline{E} = -\frac{\overline{P}}{3\varepsilon_0}$$

der P er polarisasjonen.

Oppgave 2

a) Gjør kort rede for Drudemodellen for dielektrisitetskonstanten til et metall. Vis at dielektrisitetskonstanten for et såkalt Drudemetall er gitt av:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{\omega^2 + i\omega\gamma} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}$$

Her er ω_p den såkalte plasmafrekvensen og γ er en dempningskonstant.

b) Vi skal nå se på betingelsen for at såkalte overflateplasmoner kan eksistere. Dette er oscillasjoner i elektrongassen i en metalloverflate. Vi skal se på en forenklet løsning av dette problemet der vi ser bort fra tidsavhengigheten og bare ser på løsninger av Laplaces ligning nær en metalloverflate. Metallet er ikke et perfekt metall, dielektrisitetskonstanten er gitt av Drudes formel. Betrakt et halvuendelig metall som fyller området $z > 0$. En løsning av Laplaces ligning $\nabla^2 V = 0$ i metallet er:

$$V = A\cos kx e^{-kz}$$

Vis at en løsning av Laplaces ligning for $z < 0$ (vakuum) er gitt av $V_0 = A\cos kx e^{kz}$ og at denne tilfredsstiller betingelsen at $E_{||}$ skal være kontinuerlig på grenseflata. Vis videre at betingelsen om at $D_\perp$ skal være kontinuerlig på grenseflata bare er oppfylt dersom $\varepsilon(\omega) = -1$. Vis til slutt at frekvensen for overflateplasmonene ω_s for et Drudemetall da er gitt av:

$$\omega_s^2 \approx \frac{1}{2}\omega_p^2$$

der ω_p er plasmafrekvensen. Vi antar at dempningskonstanten γ er liten.

c) Beregn så den induserte ladningstettheten i overflaten. Uttrykk svaret ved hjelp av amplituden A ovenfor og andre relevante størrelser.

I læreboka er følgende problem løst: Anta at området $z < 0$ er fylt opp av et materiale med en frekvensavhengig susceptibilitet χ_e. Anta videre at en ladning q er plassert utenfor materialet i en avstand d fra overflata. Den totale induserte overflateladning er da vist til å være gitt av uttrykket:

$$q_{ind} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2}\right)q$$

Ta utgangspunkt i dette uttrykket og vis at det er mulig å ha en endelig indusert overflateladning, selv i grensen $q \to 0$ dersom betingelsen i b) ; $\varepsilon(\omega) = -1$ er oppfylt.

Oppgave 3

a) Vis at når de elektriske og magnetiske feltene uttrykkes ved hjelp av potensialene V og $\overline{A}$ (se oppgitte formler), så er to av Maxwells ligninger automatisk oppfylt.

De siste to av Maxwells ligninger gir to koplede ligninger for V og $\overline{A}$. Finn disse.

b) Forklar hva som menes med en justeringstransformasjon (gauge-transform).

Vis at ved Lorentz-justering, slik at $\nabla \cdot \overline{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t}$, reduseres de to koplede ligningene for V og $\overline{A}$ i a) til to inhomogene bølgeligninger som er formelt dekoplet:

$$\nabla^2 V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{og} \quad \nabla^2 \overline{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overline{J}$$

Betyr dette at V og $\overline{A}$ er uavhengige av hverandre? Gi begrunnelse for svaret.

c) For tidsavhengige felt er potensialene i Lorentz gaugen gitt av:

$$V(\overline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\overline{r}',t_r)}{|\overline{r} - \overline{r}'|} d\tau' \qquad \overline{A}(\overline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\overline{J}(\overline{r}',t_r)}{|\overline{r} - \overline{r}'|} d\tau'$$

Gjør rede for begrepet retardert tid og forklar hvorfor vi må benytter den retarderte tiden t_r i disse ligningene.

d) I en uendelig lang strømførende leder blir strømmen slått på ved tiden t=0, slik at I=0 for t<0 og $I=I_0$ for t ≥0. Anta at strømmen øker øyeblikkelig til I_0 langs hele lederen når t=0. Anta at lederen ligger langs z-aksen og at den er så tynn at vi kan se bort fra tykkelsen av lederen. Det kan vises at i dette tilfelle er skalarpotensialet lik 0, mens vektorpotensialet for et punkt P i avstand s fra lederen er gitt av:

$$\overline{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2+z^2}}$$

Begrunn hvorfor vektorpotensialet er gitt av dette integralet.

Regner man ut integralet får man:

$$\overline{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right)\hat{z}$$

Beregn feltene $\overline{E}$ og $\overline{B}$. Vis at uttrykkene går mot de statiske uttrykkene når $t \to \infty$.