NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Ola Hunderi, tlf. 93411 (mobil: 95143671)

Eksamen TFY 4240: Elektromagnetisk teori

8 desember 2007

kl. 09.00-13.00

Bokmål

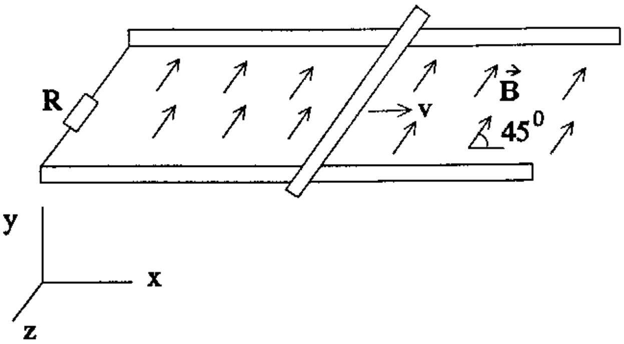
Tillatte hjelpemidler: C .
Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Typegodkjent kalkulator, tomt minne i henhold til liste utarbeidet av NTNU
Se også oppgitte formler side 5-8.

Oppgavene er utarbeidet av:

Ola Hunderi Jon Andreas Støvneng

Oppgave 1

En ledende stav kan gli friksjonsfritt på to parallelle skinner slik som vist på figuren. Skinnene er i ene enden forbundet gjennom en motstand R, slik at systemet danner en lukket strømsløyfe som vist på figuren.



Figur 1

Sløyfa ligger i x-z-planet (horisontalplanet) med skinnene langs x-aksen. Avstanden mellom skinnene er L. Systemet befinner seg i et magnetfelt B. Magnetfeltet ligger i x-y-planet og danner 45^o med sløyfas plan. $B_x = B_y > 0$, $B_z = 0$. Styrken av magnetfeltet er B**.**

a) Beregn fluksen gjennom sløyfa som funksjon av posisjonen x til staven. x regnes fra sløyfas venstre kant.

Staven beveges med en konstant hastighet v mot høyre (se figur 1). Beregn strømmen i sløyfa. Angi retningen av strømmen.

b) På grunn av strømmen i sløyfa og det ytre feltet B vil det virke en kraft på staven. Angi størrelse og retning av denne kraften. Angi også den mekaniske effekt vi må bruke for å bevege staven og sammenlign denne med den Ohmske varmeutviklingen i motstanden R.

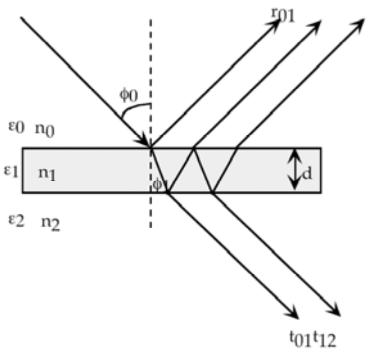
c) Kraften under b) vil også ha en vertikal komponent. For tilstrekkelig stor verdi av B vil den vertikale kraften bli så stor at staven et lite øyeblikk vil lette fra skinnene. Beregn denne verdien når stavens masse er m og tyngdens akselerasjon er g.

d) Vi skal så se på hvordan et magnetfelt kan brukes til å holde gjenstander svevende, f.eks. et tog på "magnetiske skinner". Dette kalles magnetisk levitasjon. I det homogene magnetfeltet over et strømførende plan plasseres en leder parallelt med strømretningen i planet. Anta nå at planet setter opp et felt B = 2,0 T. Hvilken strøm må sendes gjennom lederen for at kraften på den skal bli stor nok til å løfte 1 tonn pr. meter av lederen? I hvilken retning må strømmen gå?

Oppgitt: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T A^{-1} m
$g = 9{,}81$ m/s^2

Oppgave 2

a) Vi skal i denne oppgaven se på refleksjon fra en filmdekt flate; se figur 2.



Figur 2

Vis at refleksjonskoeffisienten i dette tilfelle kan skrives på formen:

$$r = \frac{r_{01} + r_{12} e^{2i\delta_1}}{1 + r_{12} r_{01} e^{2i\delta_1}}$$

og transmisjonskoeffisienten

$$t = \frac{t_{01} t_{12} e^{i\delta_1}}{1 + r_{12} r_{01} e^{2i\delta_1}}$$

Her er r_{01} Fresnels refleksjonskoeffisient på grenseflata mellom medium 0 og 1, mens t_{01} er transmisjonskoeffisienten gjennom den samme grenseflata og analogt for andre indekser.

Uttrykk fasekonstanten δ_1 ved hjelp av relevante størrelser.

b) Vis at følgende sammenheng mellom refleksjonskoeffisienter gjelder

$$r_{02} = \frac{r_{01} + r_{12}}{1 + r_{01} r_{12}}$$

Du kan anta normalt innfall. Forklar med ord hvorfor dette også må være tilfelle.

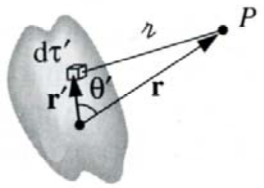
c) En mikrobølge antenne som stråler ut 10 GHz bølger, er bygget inn i en boks laget av plast. Hva er den minste veggtykkelsen boksen må ha for at veggen ikke skal være "synlig" for mikrobølgene? Anta vinkelrett innfall av mikrobølgene mot plastveggene. Brytningsindeksen til plastmaterialet er 2.5

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere dipolstrålingen fra en oscillerende ladnings- og strømfordeling med en tidsavhengighet gitt som $e^{i\omega t}$. Vektorpotensialet er i det generelle tilfelle gitt som

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{r_{iP}} e^{i(\omega t - kr_{iP})} d\tau'$$

De ulike størrelsene er gitt i figur 3. I ligningen er dessuten er $r_{iP} = |r - r'| = \mathscr{r}$



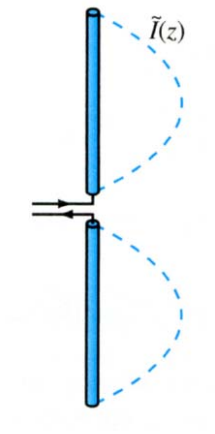
Figur 3

a) Forklar hvorfor vi får ledd av typen $e^{i(\omega t - kr_{iP})}$ i integranden. Forklar videre hvilke betingelser/antakelser som ligger til grunn når vi til laveste orden i fjernsonen skriver vektorpotensialet på formen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\int \vec{J}(\vec{r}\,')d\tau'$$

b) Anta nå at vi har en dipol av endelig lengde, en dipolantenne (se figur4). Forklar hvilken av antagelsene du diskuterte under punkt a) som nå ikke er oppfylt. Vektorpotensialet for en slik antenne er i strålingssonen generelt gitt av

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\int \vec{J}(\vec{r}\,')e^{ik\vec{r}\,'\cdot\hat{r}}d\tau'$$



Figur 4

Anta at dipolen er en tynn antenne(se figur 4) som ligger langs z-aksen og der strømmen er gitt av

$$I(z) = I_o \sin kz \quad for \;\; 0 \le z \le \frac{\lambda}{2}; \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$I(z) = -I_o \sin kz \quad for \;\; -\frac{\lambda}{2} \le z \le 0$$

Finn vektorpotensialet fra antenna.

Oppgitt:

$$\int_0^{\lambda/2} \sin kz e^{ikz\cos\theta} dz = \frac{1 + e^{i\pi\cos\theta}}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-\lambda/2}^{0} \sin kz e^{ikz\cos\theta} dz = -\frac{1 + e^{-i\pi\cos\theta}}{k\sin^2\theta}$$

c) Vi skal så se nærmere på utstrålingen fra en slik antenne.

i) Ta utgangspunkt i at Poyntings vektor er gitt av

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\omega^2 (\hat{r} \times \vec{A})^2 \,\hat{r}$$

og beregn vinkelfordelingen for strålingen fra antenna $\frac{dP}{d\Omega}$. Plott vinkelfordelingen i et polardiagram. Finn også den totale utstrålte effekt P.

Oppgitt: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos(\pi\cos\theta))^2}{\sin\theta} d\theta = 1.66$

ii) Vi definerer en antennes direktivitet som

$$D = \frac{4\pi r^2 S_{\max}}{P}$$

Her er r avstanden fra antenna og S_{max} er maksimalverdien av Poyntings vektor. Finn D for antenna.

iii) Vi definerer videre strålingsmotstanden for antenna ut fra formelen

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R_{Rad}$$

Vis *at* R_{Rad} får dimensjonen ohm og beregn R_{Rad} for antenna.

d) Vi skal til slutt se litt på magnetisk dipolstråling.

i) Vektorpotensialet for magnetisk dipolstråling er gitt av

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r} ik\hat{r} \times \int \frac{1}{2}(\vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,'))e^{ik\hat{r}\vec{r}\,'}d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0 ik}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}(\hat{r}\times\vec{M}_0)\end{aligned}$$

Finn vektorpotensialet for antenna ovenfor.

ii) Anta at vi har en liten sirkulær strømsløyfe slik at vi kan se bort fra $e^{ik\hat{r}\vec{r}\,'}$ leddet.

Beregn M_0 for en sirkulær strømsløyfe med radius R og som fører strømmen I.

Hint: Bruk sylinderkoordinater og uttrykk strømmen ved hjelp av passende delta-funksjoner.

Formelsamling Elektrostatikk

$\int dA$ angir flateintegral og $\int dl$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. **Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A}$$
- Elektrostatisk kraft er konservativ:
$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$
- Gauss' lov for elektrisk felt og elektrisk forskyvning:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$
- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$
- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$
- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:
$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta V}$$
- Kapasitans:
$$C = \frac{q}{V}$$
- Energitetthet i elektrisk felt:
$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Electric resistance:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

- Capacitance for parallel plate condenser:

$$\mathrm{C} = \varepsilon \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{d}}$$

- Electric energy stored in condenser:

$$U = \frac{1}{2} q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

- Parallel coupling:

$$\mathrm{C} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{C}_{\mathrm{i}}$$

- Series coupling:

$$\frac{1}{\mathrm{C}} = \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{i}}}$$

- The magnetic force F on a charge with velocity v:

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{q} \vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}$$

- Magnetic force on a conductor with current I:

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{I}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} \times \vec{\mathrm{B}}$$

- Magnetic field from a charge with velocity v

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Biot-Savarts law:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Amperes law:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{innenfor}$$

- Magnetic field in long coil:

$$B = \mu_0 n I$$

- Magnetic field from long, currentcarrying conductor

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Oppgitt:

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

Maxwell's Equations

In general :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Auxiliary Fields

Definitions :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

Linear media :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lorentz force law

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Energy, Momentum, and Power

Energy : $$U = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau$$

Momentum : $$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, d\tau$$

Poynting vector : $$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Larmor formula : $$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

ϵ_0	$=$	$8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$	(permittivity of free space)
μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$	(permeability of free space)
c	$=$	$3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m}/s$	(speed of light)
e	$=$	$1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$	(charge of the electron)
m	$=$	$9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& r\sin\theta\cos\phi \\ y &=& r\sin\theta\sin\phi \\ z &=& r\cos\theta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{x}} &=& \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} &=& \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} &=& \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi &=& \tan^{-1}(y/x) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{r}} &=& \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &=& \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &=& -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{array}\right.$$

Cylindrical

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& s\cos\phi \\ y &=& s\sin\phi \\ z &=& z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{x}} &=& \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} &=& \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} &=& \hat{\mathbf{z}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} s &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &=& \tan^{-1}(y/x) \\ z &=& z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{s}} &=& \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &=& -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} &=& \hat{\mathbf{z}} \end{array}\right.$$