Eksamen 74316 Elektromagnetisk teori (1)

LØSNINGER 22. mai 1990

Oppgave 1

a) Dielektrisk medium med konduktivitet null.

$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \dot{\underline{D}} = \dot{\underline{D}}$ (1)

$\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$ (2)

Iflg. Rottmann gjelder

$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E} = -\nabla \times \mu \dot{\underline{H}} = -\mu\epsilon \ddot{\underline{E}}$

Ingen aktive kilder gir

$\nabla^2 \underline{E} - \mu\epsilon \ddot{\underline{E}} = 0$

b) Iflg. Rottmann gjelder

$\nabla \cdot (\varphi(\underline{r})\underline{a}) = \underline{a} \cdot \nabla\varphi(\underline{r})$ (3)

$\nabla \times (\varphi(\underline{r})\underline{a}) = \nabla\varphi(\underline{r}) \times \underline{a}$ (4)

Uttrykket for en plan bølge involverer en vektor (feltamplitude) og en skalar funksjon (faseledd):

$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 \exp(i(\underline{k}\underline{r} - \omega t))$ (5)

Likn. (3,4,5) innsatt i (2) gir

$i\underline{k} \times \underline{E} = i\mu\omega \underline{H}$

fordi også

$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_0 \exp(i(\underline{k}\underline{r} - \omega t))$

Siden $\nabla \cdot \underline{D} = 0$ vil $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ og vi får

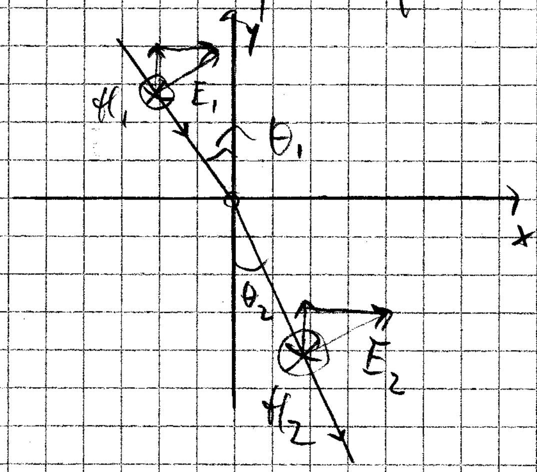
$|\underline{E}| = \frac{\mu\omega}{k} |\underline{H}|$

Bølgeimpedansen er følgelig gitt ved

$$Z = \frac{\mu\omega}{k} = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n} = Z_0 / n$$

hvor $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ er bølgeimpedansen i vakuum ~~mens~~ og n er brytningsindeksen.

c) Tangentialkomponentene til $\underline{E}$ og $\underline{H}$ er bevart på grenseflaten. Det gir



$$H_1 = H_2$$

$$E_1\cos\theta_1 = E_2\cos\theta_2$$

Ved hjelp av bølgeimpansen får vi

$$\frac{E_1}{Z_1} = \frac{E_2}{Z_2}$$

Dvs. at

$$E_1\sqrt{\epsilon_1} = E_2\sqrt{\epsilon_2}$$

og $\sqrt{\dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$

På grunn av Snells lov gjelder også at

$$\sqrt{\epsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\epsilon_2}\sin\theta_2 = \sqrt{\epsilon_2}\,(1-\cos^2\theta_2)$$

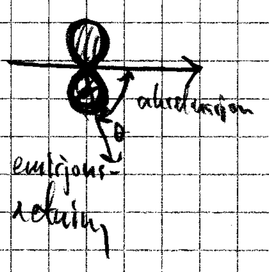
dvs.:

$$\sqrt{\epsilon_1}\,(1-\cos^2\theta_1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\epsilon_2}\left(1-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos^2\theta_1\right)$$

Løst m.h.p. θ_1 finner vi

$$\theta_B = \theta_1 = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right)$$

d) Strålingsmønsteret går som $\sin^2\theta$ der θ er vinkelen mellom akselerasjon/retardasjon og emisjonsretning.



Ved totalrefraksjon har vi $90°$ mellom medium 2's punkt-dipoler og "reflektert" stråle; følgelig null refleksjon.

Oppgave 2

a) Vi har

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \frac{\underline{J}(\underline{r}')\times(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int dv' \frac{\underline{J}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

fordi

$$\nabla\times(\underline{a}\varphi) = \varphi\nabla\times\underline{a} - \underline{a}\times\nabla\varphi = -\underline{a}\times\nabla\varphi$$

når $\underline{a}$ er en konstant vektor. Derfor gjelder

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla\times\underline{A}(\underline{r})$$

og

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\underline{J}(\underline{r}')\,dv'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Siden $\nabla\cdot\underline{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\underline{A}) \equiv 0$ impliserer dette at magnetiske kilder (sluk) ikke finnes.

b)

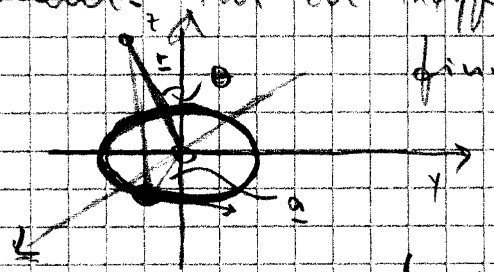
Her vil $\underline{J}\,dv' \to I\,dl'$ fordi

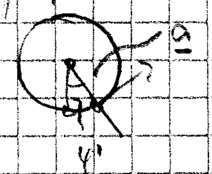
$$\underline{J}\,dv' = (I/(dx'dz'))\,dx'dy'dz'\,\hat{e}_2 = I\,dy'$$

for strøm i y-retning, f.eks.
Derfor er

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{dl'\,I}{|\underline{r}-\underline{l}'|} = \underline{A}_r + \underline{A}_z + \underline{A}_\varphi$$

Av symmetrigrunner overlever bare asimutal komponent. Tar en sløyfe i gangen. Trenger $\underline{a}\cdot\underline{r}$, som finnes av figurene:





Dette gir: $\underline{r}\cdot\underline{a} = ra\,(\cos\varphi', \sin\varphi', 0)\cdot(\sin\theta, 0, \cos\theta) = ra\sin\theta\cos\varphi'$

$$\underline{A}_\varphi = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\varphi'\cos\varphi'}{(r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\varphi')^{\frac12}} =$$

$$\hat{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{a^2+r^2}\left(1-\frac{2ra\sin\theta\cos\varphi'}{a^2+r^2}\right)^{\frac12}}$$

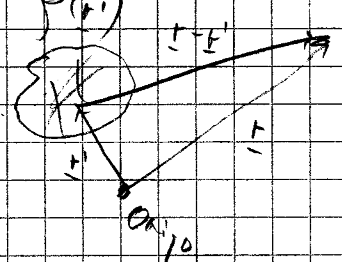
Rekkeutvikling gir

$$\underline{A}_\varphi \approx \hat{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} a\cos\varphi'\,d\varphi' \left(\frac{ra\sin\theta\cos\varphi'}{(a^2+r^2)^{3/2}}\right)$$

$$\underline{A}_\varphi = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4}\frac{a^2 r\sin\theta}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

Tar vi med begge sløyfene får vi for totalt vektorpotensial

$$\underline{A} = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_0 I r\sin\theta}{4}\left(\frac{a^2}{(a^2+r^2)^{3/2}} - \frac{b^2}{(b^2+r^2)^{3/2}}\right)$$



c) Bruker

$$(1+\epsilon)^{-\frac12} \simeq 1-\frac12\epsilon+\frac38\epsilon^2\cdots$$

dvs.

$$\frac{1}{|\underline r-\underline r'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2\underline r\cdot\underline r')^{\frac12}} = \frac1r\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{\underline r\cdot\underline r'}{r^2}\right)^{-\frac12}$$

$$\simeq \frac1r\left(1-\frac12\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{\underline r\cdot\underline r'}{r^2}\right)+\frac38\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{\underline r\cdot\underline r'}{r^2}\right)^2\right)$$

$$\simeq \frac1r\left(1+\frac{\underline r\cdot\underline r'}{r^2}+\frac12\,\frac{3(\underline r\cdot\underline r')^2-r'^2r^2}{r^4}+\cdots\right)$$

Kvadrupolbidraget til potensialet kan følgelig skrives som

$$\varphi_{kv}(\underline r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\int\rho(\underline r')\left(3(\underline r\cdot\underline r')^2-(r'r)^2\right)dv' \qquad (1)$$

Dette kan skrives som

$$\varphi_{kv}(\underline r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij}^{3} x_i x_j Q_{ij}$$

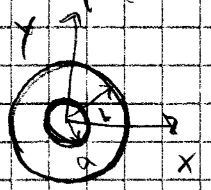
hvor kvadrupoltensoren er gitt ved

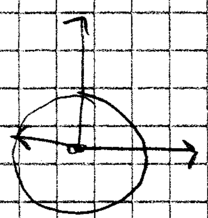
$$Q_{ij} = \int \rho(\underline{r}')\left(3x_i'x_j' - \delta_{ij} r'^2\right)dv'$$

For å se dette må en omforme likn. (1) ved hjelp av

$$\int \rho(\underline{r}')\left(3(\underline{r}\cdot\underline{r}')^2 - (r'r)^2\right)dv' = \int \rho(\underline{r}')\sum_{i,j}^{3}\left(x_i x_i' x_j x_j' 3 - x_i x_j \delta_{ij} r'^2\right)dv'$$

d) Kvadrupolmoment-tensoren har i alt $3 \times 3 = 9$ komponenter. Tar vi en ring i gangen får vi ikke-null bidrag for $i = j$, dvs at





$$Q_{11} = \int dv' \left(3x'^2 - r'^2\right)\rho(\underline{r}')$$

$\Rightarrow$

$$Q_{11} = \frac{L}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\left((3\cos^2\varphi)a^2 - a^2\right)d\varphi\, a$$

$$Q_{11} = \frac{L}{2}a^2$$

Av symmetrigrunner er $Q_{22} = Q_{11}$ og siden $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{Q}} = 0$ er $Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22}$. Alt dette medfører at de tre hovedverdiene for kvadrupoltensoren til de motsatt ladete ringene blir

$$Q_1 = \frac{L}{2}(a^2 - b^2)$$

$$Q_2 = \frac{L}{2}(a^2 - b^2)$$

$$Q_3 = L(b^2 - a^2)$$