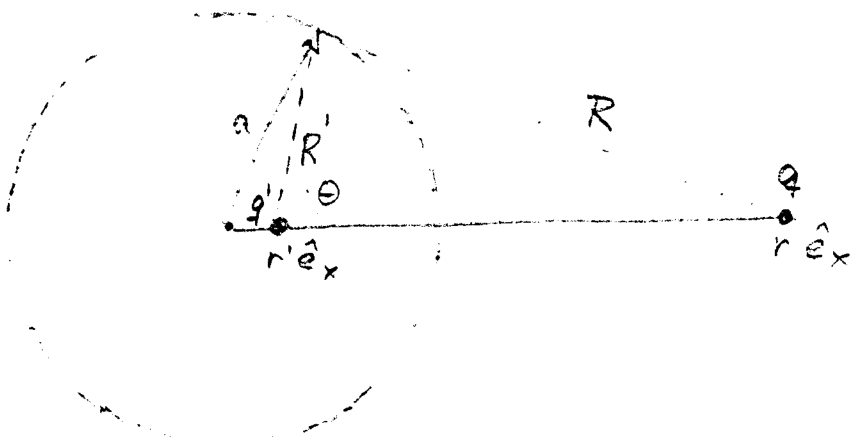
FAG 74316 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2
Løsningsforslag eksamen 19. aug 1992

Oppgave 1:

a) Dersom det ikke skal gå strøm inne i kula må vi ha $\vec{E}=0$, dvs. $\Phi=$ konst. på overflaten av kula (og inne i den).

b) Geometrien er som på figuren under:



Ved trigonometri ser vi at

$$R=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}\,,\quad R'=\sqrt{r'^2+a^2-2ar'\cos\theta}$$

Vi ønsker at potensialet

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right)$$

skal være uavhengig av vinkelen θ, dvs

$$\frac{d\Phi}{d(\cos\theta)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q\frac{dR^{-1}}{d(\cos\theta)}+q'\frac{dR'^{-1}}{d(\cos\theta)}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(q\;\frac{ar}{R^3}+q'\frac{ar'}{R'^3}\right)=0\,.$$

Oppgave 1 forts:

b forts) Omskrevet:

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^3 = \left(\frac{r^2+a^2-2ar\cos\theta}{r'^2+a^2-2ar'\cos\theta}\right)^{3/2} = \left(\frac{r^2+a^2}{r'^2+a^2}\right)^{3/2}\left[\frac{1-\frac{2ar}{r^2+a^2}\cos\theta}{1-\frac{2ar'}{r'^2+a^2}\cos\theta}\right]^{3/2}$$

$$= -\frac{qr}{q'r'} \qquad (*)$$

For at venstresiden skal være uavhengig av θ må

$$\frac{2ar}{r^2+a^2} = \frac{2ar'}{r'^2+a^2}$$

Løst med hensyn på r':

$$\underline{r' = \frac{a^2}{r}}$$

(Den andre muligheten, $r = r'$, forkastes)

Dette kan innsettes i $(*)$ som løses med hensyn på q':

$$\underline{q'} = -q\left(\frac{r}{r'}\right)\left(\frac{r'^2+a^2}{r^2+a^2}\right)^{3/2} = \underline{-\frac{a}{r}q}$$

c) Potensialet utenfor kula blir

$$\Phi(\vec{x}) = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{|\vec{x}-r\hat{e}_x|} - \frac{(a/r)}{|\vec{x}-(a^2/r)\hat{e}_x|}\right]$$

og det tilhørende $\vec{E}$-feltet:

$$\vec{E}^+(\vec{x}) = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{x}-r\hat{e}_x}{|\vec{x}-r\hat{e}_x|^3} - \left(\frac{a}{r}\right)\frac{\vec{x}-(a^2/r)\hat{e}_x}{|\vec{x}-(a^2/r)\hat{e}_x|^3}\right]$$

mens $\vec{E}$-feltet innenfor kula forsvinner:

$$\vec{E}^-(\vec{x}) = 0.$$

Ved overflaten, $|\vec{x}| = a$, må $\vec{E}^+(\vec{x})$ stå normalt på overflaten, med styrke

$$\underline{E_n^+} = \left.\frac{\vec{x}\cdot\vec{E}(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right|_{|\vec{x}|=a} = \underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}}$$

Oppgave 1 forts:

d) Fordelingen av overflateladning blir

$$\underline{\underline{\sigma(\theta)}} = \varepsilon_0\left(E_n^+ - E_n^-\right) = \underline{\underline{\frac{q}{4\pi a}\,\frac{a^2-r^2}{[a^2+r^2-2ar\cos\theta]^{3/2}}}}$$

Den totale ladningen Q fånnes ved integrasjon

$$\underline{\underline{Q}} = a^2\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \sigma(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \left(\frac{qa}{2}\right)\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\,\frac{a^2-r^2}{[a^2+r^2-2ar\cos\theta]^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{qa}{2}\right)(a^2-r^2)\cdot\Big[\underbrace{\frac{1}{ar}\left[a^2+r^2-2ar\cos\theta\right]^{-1/2}}_{\frac{1}{ar}\cdot\frac{2a}{r^2-a^2}}\Big]_{-1}^{1} \qquad (\text{når } r>a)$$

$$\underline{\underline{= -q\frac{a}{r} = q'}}$$

Den totale ladningen på kuleoverflaten er lik speilladningen.

e) Om vi legger en speilladning q'' <u>i sentrum av kula</u> blir fortsatt $\Phi = \text{konst.}$ på overflaten. Hvis den totale ladningen på kula er $Q \neq q'$ må vi velge

$$\underline{\underline{q'' = Q - q'}}$$

$\vec{E}$-feltet på x-aksen, $\vec{r} = x\hat{e}_x$, blir

$$\vec{E}(x\hat{e}_x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q''}{x^2} + \frac{q'}{(x-r')^2}\right)\hat{e}_x$$

slik at kraften på partikkelen q blir

$$\underline{\underline{\vec{F}}} = q\,\vec{E}(r\hat{e}_x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q-q'}{r^2} + \frac{q'}{(r-r')^2}\right)\hat{e}_x$$

$$\underline{= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Qq}{r^2} + \frac{q^2a}{r^3} - \frac{q^2ar}{(r^2-a^2)^2}\right]\hat{e}_x}$$

Oppgave 1 forts:

f) Potensialet på overflaten av kula er

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q''}{a} + \frac{q'}{a-r'} + \frac{q}{r-a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{r}\right)$$

For et gitt potensial Φ blir den totale ladningen

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 a\Phi - qa/r$$

Med dette innsatt i uttrykket for kraften

$$\vec{F} = \left[\frac{aq\Phi}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 a r}{(r^2-a^2)^2}\right]\hat{e}_x$$

Oppgave 2

a)

$$\vec{J}(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{j}(\vec{r}) =$$

$$I_0\,\hat{e}_z \int dx\,dy\,dz\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sin[k_0(\tfrac{1}{2}d-|z|)]\,\Theta(\tfrac{1}{2}d-|z|) *$$

$$\delta(y) * [\delta(x-\tfrac{1}{2}x_0)e^{-i\psi} + \delta(x+\tfrac{1}{2}x_0)e^{i\psi}]\, e^{-it\omega_0}$$

$$= I_0\,\hat{e}_z\left[e^{-\frac{i}{2}k_x x_0 - i\psi} + e^{\frac{i}{2}k_x x_0 + i\psi}\right] *$$

$$* \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \sin[k_0(\tfrac{1}{2}d-|z|)]\, e^{-ik_0 z\cos\vartheta}$$

Vi har brukt at $k_z = k_0\cos\vartheta$. Videre er $k_x = k_0\sin\vartheta\cos\varphi$. Integralet over z var oppgitt i oppgaveteksten. Vi finner derfor

$$\boxed{\vec{J}(\vec{k}) = 2I_0\,\hat{e}_z \cos[\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi] * \frac{2}{k_0\sin^2\vartheta}\left[\cos(\tfrac{1}{2}k_0 d\cos\vartheta) - \cos(\tfrac{1}{2}k_0 d)\right]}$$

b) Vi har at utstrålt effekt

$$\underline{U(\hat{n})} \propto |j_\perp(\vec{k})|^2 = \sin^2\vartheta\, |\vec{J}(\vec{k})|^2 \propto \underline{|\vec{J}(\vec{k})|^2}$$

c) $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\vartheta = 0,\ \sin\vartheta = 1$

d-avhengigheten til utstrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}k_0 d\cos\vartheta\right) - \cos\left(\tfrac{1}{2}k_0 d\right)\right]^2 \underset{\vartheta=\pi/2}{=} \left[1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}k_0 d\right)\right]^2$$

som blir størst når $\cos(\frac{1}{2}k_0 d) = -1$, dvs.

$$\tfrac{1}{2}k_0 d = (2n+1)\pi = \pi, 3\pi, \dots$$

eller

$$\underline{\underline{d = \frac{(4n+2)\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{k_0}, \frac{6\pi}{k_0}, \dots}}$$

d) φ-avhengigheten til utstrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi\right)\right]^2 \underset{\vartheta=\pi/2}{=} \left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi\right)\right]^2$$

For maksimal utstråling i $\hat{e}_x$-retningen (dvs. $\cos\varphi = 1$) må vi ha

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}k_0 x_0 + \psi\right) = \pm 1, \text{ dvs}$$

$$\tfrac{1}{2}k_0 x_0 + \psi = n\pi = 0, \pi, 2\pi, \dots \qquad (**)$$

For minimal utstråling i $\hat{e}_y$-retningen ($\cos\varphi = 0$) må vi ha

$$\cos\psi = 0, \text{ dvs. } \underline{\underline{\psi = (m+\tfrac{1}{2})\pi = \pm\tfrac{\pi}{2}, \pm\tfrac{3\pi}{2}, \dots}}$$

Dette betyr at vi må ha

$$\tfrac{1}{2}k_0 x_0 = n\pi - \psi = (n-m-\tfrac{1}{2})\pi = \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}, \dots$$

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{(2l+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, \dots}}$$

e)
For maksimal utstråling i $\hat{e}_y$-retningen må vi ha $\cos\psi = \pm 1$, dvs

$$\underline{\underline{\psi = m\pi = 0, \pm\pi, ..}}$$

For minimal utstråling i $\hat{e}_x$-retningen må vi ha

$$\frac{1}{2}k_0 x_0 = (\ell + \tfrac{1}{2})\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ..$$

dvs.

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{(2\ell+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, ...}}$$

som under pkt. d).

Oppgave 3

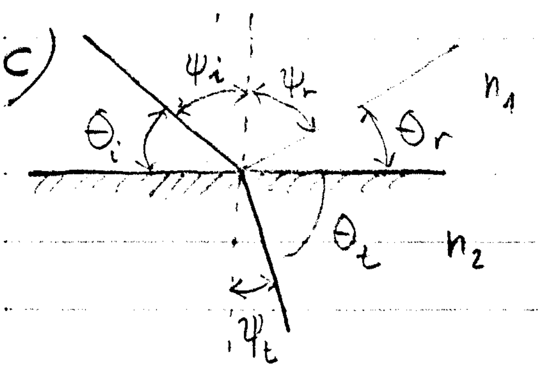
a) Betingelsen

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

pålagt de elektromagnetiske potensialene kalles for Lorentz' justering. Med denne justeringen dekobler Maxwell's ligninger til uavhengige bølgeligninger for hver komponent Φ og A^x, A^y, A^z.

b) De retarderte potensialene er løsninger av Maxwell's ligninger som avhenger av kildene (ladningen og strømmen) i fortiden.

c)



Snell's brytningslov sier hvordan lysets retning forandres når det går fra et medium med brytningsindeks n_1 til et medium med brytningsindeks n_2:

$$\underline{\frac{\sin\psi_t}{\sin\psi_i} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}}$$

d) Brewster's vinkel er den innfallsvinkel der parallellpolarisert lys ikke reflekteres

$$\tan\theta_B = \frac{n_1}{n_2}$$

e) Resonant absorpsjon har vi der imaginærdelen til dielektrisitetskonstanten er signifikant forskjellig fra null. Molekylene som gir opphav til dielektrisitetkonstanten har som regel naturlige eksitasjons- svingefrekvenser ω_i. Resonant absorpsjon oppstår ved lysfrekvenser nær disse.

f) Maxwell's spenningstensor uttrykker hvordan de elektromagnetiske feltene gir opphav til krefter på et volumelement. Inngår i kontinuitetsligningen for impuls. Vi har

$$T_{ij} = (B_i H_j + D_i E_j) - \delta_{ij}\frac{1}{2}(\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D})$$

og bevaringsligningen for impuls er

$$\frac{\partial}{\partial t} g^i + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ji} = (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})^i$$

~~g) Thomson spredning er lysspredning på fri~~ ladninger. For elektroner

$$\frac{d\sigma^T}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\theta$$

~~der $r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$ er den klassiske elektronradius~~

h) En ladning som svinger i et harmonisk potensial vil stråle ut energi. Pga strålingsreaksjonen får vi derved en viss dempning, dvs at resonansfrekvensen ikke blir helt skarp men får en naturlig linjebredde

$$\gamma = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e c^3}\omega_0^2 = \frac{2}{3} r_e \omega_0^2 / c .$$