FAG 74316 Elektrisitet og magnetisme 2
Løsningsforslag, eksamen 12. januar 1993

Oppgave 1

a) Maxwell-ligningen

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

kan tolkes som en modifikasjon av Ampères lov

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \longrightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J}+\vec{J}_M)$$

der

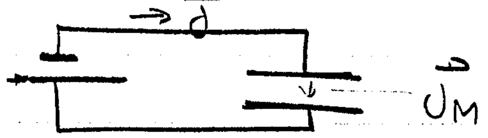
$$\vec{J}_M \equiv \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

kalles for Maxwell's forskyvningsstrøm (tetthet).

[Kommentarer:

i) Dette tilleggsleddet er nødvendig når $\nabla\cdot\vec{J}\neq 0$.

ii) Når en kondensator lades opp vil det gå en regulær strøm i tilførselsledningene, og en forskyvningsstrøm mellom kondensatorplatene.



iii) Det er ingen ekte strøm i den forstand at den er assosiert med noen ladningstransport.

iv) Dette leddet gjør propagering av elektromagnetiske bølger mulig]

b) De elektromagnetiske feltene kan uttrykkes ved potensialer

$$\vec{E} = -(\nabla\phi+\dot{\vec{A}}), \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Feltene er invariante under justér transformasjonen av potensialene

$$\phi \to \phi+\frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}\to\vec{A}-\nabla\Lambda$$

der Λ er en vilkårlig deriverbar funksjon av tid og rom. Dette kalles justerinvarians.

c) En generell ladningsfordeling $\rho(\vec{x})$ kan karakteriseres på en systematisk måte ved sine (elektriske) multipolmomenter

$$Q = \int d^3x\, \rho(\vec{x}) \qquad \text{(monopolmoment)}$$
$$\vec{P} = \int d^3x\, \vec{x}\rho(\vec{x}) \qquad \text{(dipolmoment)}$$
$$Q^{ij} = \int d^3x\, (3x^i x^j - x^2\delta^{ij})\rho(\vec{x}) \qquad \text{kvadrupolmoment.}$$

d) Konform avbildning er (blant annet) en metode til å løse 2-dimensjonale potensialproblemer. Metoden er basert på at real- og imaginærdelen til en analytisk funksjon tilfredsstiller Laplace's ligning. Et (vanskelig) potensialproblem med en komplisert rand kan ved en passende konform avbildning transformeres til et ekvivalent problem med enklere rand.

e) Se på en plan harmonisk lysbølge som brytes og reflekteres ved en plan grenseflate. Innfallende, reflektert og transmittert lysstråle vil ligge i et plan — innfallsplanet.

- Normalpolarisert lys vil si at $\vec{E}$-vektoren i lysfeltet svinger normalt på innfallsplanet (dvs. parallellt med grenseflaten).
- Parallellpolarisert lys vil si at $\vec{E}$-vektoren i lysfeltet svinger parallellt med innfallsplanet.

f) Stokes parametrene er fire reelle parametre som karakteriserer polarisasjons-tilstanden til en (ikke nødvendigvis mono-kromatisk) lysbølge.

g) Oscillatorstyrkene f_i er størrelser som brukes til å parametrisere de dynamiske egenskapene til et atom eller molekyl i vekselvirkning med elektromagnetiske felter. I en enkel klassisk modell er f_i antallet elektroner i molekylet som er harmonisk bundet med karakteristisk frekvens ω_i og demping γ_i. Kvantemekanisk trenger ikke f_i å være heltallig, men summeregelen

$$\sum f_i = Z \equiv \# \text{ elektroner i molekylet}$$

skal holde.

h) Maxwell's spenningstensor uttrykker impuls-strømtettheten i det elektromagnetiske felt, slik at $-T^{ij}$ er strømtettheten av "j-impuls" i retning i.

$$T^{ij} = D^i E^j + B^i H^j - \delta^{ij} u_{EM}$$

der $u_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$.

Den elektromagnetiske kraften på et legeme V (med rand ∂V) er gitt som

$$F^i = \int_{\partial V} d\sigma^j \, T^{ij}$$

På differensiell form

$$\frac{\partial g^i_{EM}}{\partial t} + f^i = \partial_i T^{ji}.$$

i) Pga strålingsreaksjonen vil en ladning som slippes løs i et harmonisk potensial undergå demping. Den vil derfor ikke stråle på en skarp frekvenslinje ω_0, men over et frekvensspekter rundt ω_0. Halvverdibredden av dette spekteret kalles for naturlig linjebredde.

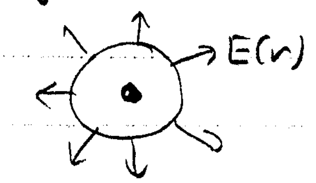
j) Rayleighspredning er ~~spredning~~ av lys på atomer og molekyler. Ved lave frekvenser har spredningstverrsnittet oppførselen

$$\sigma \sim \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

Dette er f.eks. årsaken til at himmelen er blå og solnedgangen rød.

k) Synkrotronstråling er stråling fra relativistiske ladete partikler. Opprinnelig fra sirkulær bevegelse i en synkrotron, men i dedikerte fasiliteter (som Grenoble) fra mer kompliserte bevegelsesmønstre (forårsaket av f.eks. "wiggler" magneter).

Oppgave 2

a) 

Gauss' lov på integral form:

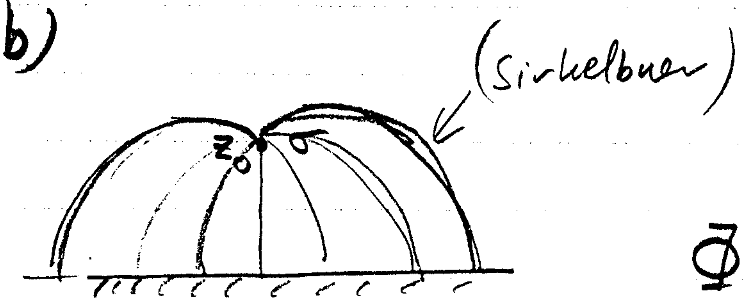
$$2\pi r L\, E(r) = \frac{\sigma L}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{for } r > r_0 = 25\,\mu\text{m}$$

$$= 0 \quad (\text{for } r < r_0)$$

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^{r} dr'\, E(r')$$

$$= -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r/r_0) + \Phi(r_0)$$

b) 

Velg komplekse koordinater $(x,y) \Rightarrow z$

$$\Phi(z) = \frac{-\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left|\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right|$$

$\bar{z}_0 \cdot -\sigma$

$z_0 = (0, +y_0)$
$\bar{z}_0 = (0, -y_0)$ $\quad y_0 = 1\,\text{cm}$

[Kommentar: Man kan vise at ekvipotensial-flatene blir sirkler (og feltlinjene følger sirkelbuer).

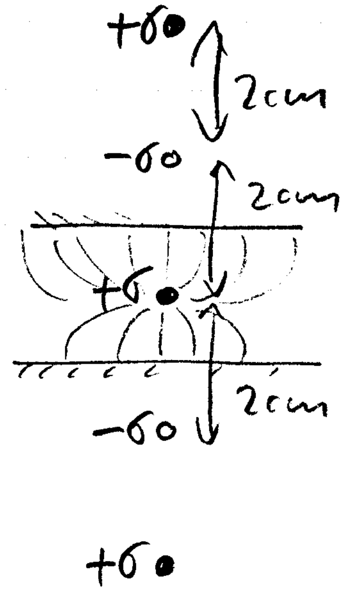
c) $r_0 = |z - z_0| << |z - \bar{z}_0| \Rightarrow$

$$\Phi \sim \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{2y_0}\right)$$

$r_0 = 25\,\mu\text{m}$, $2y_0 = 2\,\text{cm}$, $\Phi = 4000\,V \Rightarrow$

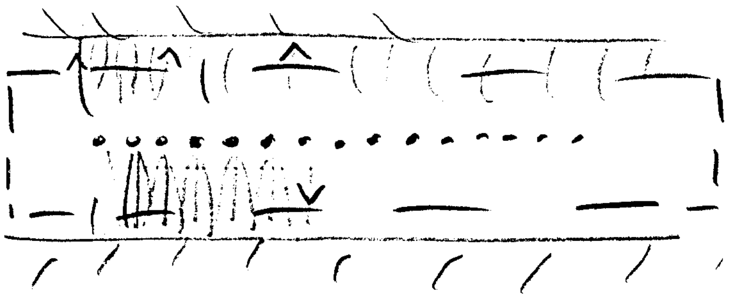
$$\underline{\sigma} = -\frac{2\pi\varepsilon_0 \Phi}{\ln(r_0/2y_0)} = \frac{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{3}}{\ln\left(\frac{2000}{2.5}\right)} = \underline{3.33 \cdot 10^{-8}}$$

d)



En linje med uendelig antall speilladninger av alternerende fortegn. Avstand 2 cm

e)



Feltet vil være tilnærmet konstant av styrke

$$E \simeq \frac{4000\,V}{1\,cm} = 4\cdot 10^{5}\,\frac{V}{m}$$

i ±y-retningen,

Vi legger en eske av $\overbrace{\text{bredde}}^{\text{(stor)}}$ B og $\overbrace{\text{lengde}}^{\text{(stor)}}$ L rundt linjeladningene. Gauss lov gir da

$$2E\cdot L\cdot B \simeq \frac{\sigma\cdot N(B)}{\varepsilon_0}\,L$$

der $N(B) = \frac{B}{2mm}$ er antallet linjer innenfor esken.

Da

$$\underline{\sigma} = 2\,\varepsilon_0\,E\cdot 2mm = 2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^{5}\cdot 2\cdot 10^{-3}$$

$$\underline{= 1.417\cdot 10^{-6}}$$

Oppgave 3

a) $\rho(\vec{x},t) = -e\,\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t))$

$\vec{J}(\vec{x},t) = -e\,\vec{v}_e(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t))$

der

$$\vec{r}_e(t) = R\left[\cos\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_x + \sin\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_y\right]$$

$$\vec{v}_e(t) = v\left[-\sin\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_x + \cos\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_y\right]$$

og $e \simeq 1.6\cdot 10^{-19}\,C$ er positronets ladning

ved kjerneregelen:

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = \cancel{e}\frac{d\vec{r}_e}{dt}\,\nabla_x\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t)) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)$$

b)

$$\rho(\vec{k},t) = -e\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -e\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_e(t)}$$

$$\vec{J}(\vec{k},t) = -\,\vec{v}_e(t)\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -e\,\vec{v}_e(t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}_e(t)}$$

c) $\vec{r}_e(t), \vec{v}_e(t)$ er periodiske med frekvens

$$\omega = \omega_1 = \frac{v}{R}$$

Vi vil få stråling på denne frekvensen, og dens overharmoniske

$$\omega_n = n\omega_1.$$

Dipolapproksimasjonen er generelt god når kildens utstrekning (her R) er mye mindre enn strålingens bølgelengde (her $\frac{c}{\omega_n} = \frac{cR}{nv}$.

Altså bør vi ha

$$\frac{nv}{c} \ll 1 \qquad \text{spesielt} \qquad \frac{v}{c} \ll 1$$

(Når $v/c \ll 1$ vil også stråling på høyere harmoniske bli undertrykket

d) $$\vec{j}(\vec{k},\omega) \equiv \int dt\, e^{i\omega t}\, \vec{j}(\vec{k},t)$$

$$\simeq -e \int dt\, e^{i\omega t}\, \vec{v}_e(t)$$

Vi innfører kompleks representasjon for $\vec{v}_e(t)$:

$$\vec{v}_e(t) = \mathrm{Re}\; e^{-i\omega_1 t}\,(\hat{e}_y - i\hat{e}_x)$$

og finner (i kompleks rep.)

$$\vec{j}(\vec{k},\omega) = \underbrace{-ev(\hat{e}_y - i\hat{e}_x)}_{\equiv \vec{j}(\vec{k})}\, 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)$$

$$\underline{j_\perp^i} = (\delta^{il} - n^i n^l)\, j^l$$

$$\underline{= -ev\left[(\delta^{i2} - n^i n^2) - i(\delta^{i1} - n^i n^1)\right] 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)}$$

[Eventuelt i reell representasjon:

$$\vec{j}(\vec{k},\omega) = -\pi e v\left[\left(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right)\hat{e}_y - i\left(\delta(\omega-\omega_1)-\delta(\omega+\omega_1)\right)\hat{e}_x\right]$$

$$j_\perp^i(\vec{k},\omega) = -\pi e v\Big[\left(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right)(\delta^{i2}-\hat{n}^i\hat{n}^2) - i\left(\delta(\omega-\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)\right)(\delta^{i1}-\hat{n}^i\hat{n}^1)\Big]$$

e) Enklest løsn. er å bruke formelen for utstrålt effekt fra ikke-relativistisk akselerert partikkel

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2 \quad \text{der} \quad a^2 = \frac{v^4}{R^2},$$

Fra foregående uttrykk menges

$$|\vec{j}_\perp|^2 = \vec{J}_{\perp R}^{\,2} + \vec{J}_{\perp I}^{\,2}.$$

$$\vec{J}_{\perp R}^{\,2} \propto \delta^{i2}\delta^{i2} - 2(\hat{n}^2)^2 + (\hat{n}^2)^2 = 1 - (\hat{n}^2)^2$$

$$= 1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi$$

$$\vec{J}_{\perp I}^{\,2} \propto \delta^{i1}\delta^{i1} - 2(\hat{n}^1)^2 + (\hat{n}^1)^2 = 1 - (\hat{n}^1)^2$$

$$= 1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$|\vec{j}_\perp|^2 \propto 2 - \sin^2\vartheta = 1 + \cos^2\vartheta$$

Prefaktoren er $(ev)^2$, Derav

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega_0^2}{32\pi^2 c}(ev)^2(1+\cos^2\vartheta) \qquad \omega_0 = \frac{v}{R}$$

$$\int d\Omega\,(1+\cos^2\vartheta) = 2\pi\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathcal{P} = \frac{\mu_0 e^2 v^4}{6\pi c R^2} = \frac{e^2 v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^2}}$$

f) Utstrålt effekt = Friksjonstap

$$\mathcal{P} = v F_r$$

$$\Rightarrow \underline{F_r} = \frac{\mathcal{P}}{v} = \underline{\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^3}$$

rettet mot bevegelsen.