KONTINUASJONSEKSAMEN I
FAG 74316 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2
18. august 1993

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1.

a) □ Coulombs lov uttrykker hvilke elektrostatiske krefter som virker mellom to ladninger q_1, q_2:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \; ; \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Assosieres også med Maxwell-ligningen

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

□ Faradays lov uttrykker hvilken elektromotorisk spenning som blir indusert i en strømsløyfe når fluksen gjennom sløyfen varierer med tiden:

$$EMS = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Assosieres også med Maxwell-ligningen

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

□ Amperes lov uttrykker hvilket $\vec{B}$-felt som blir indusert fra en strømkilde (I situasjoner der forskyvningsstrømmen $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}/\mu_0$ kan neglisjeres)

Assosieres med Maxwell-ligningen

$$\nabla\times B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

b) Coulomb justering: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

Lorentz —"— : $\frac{\partial}{c\partial t}(\Phi/c) + \nabla\cdot\vec{A} = 0$

c)
Elektriske dipolmoment for et sett ladninger q_i i posisjonene $\vec{r}_i$:

$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Uavhengig av valg av origo dersom $\sum_i q_i = 0$.
Polariserbarhet: Dipolmomentet er proporsjonalt med det påtrykte feltet. Proporsjonalitetskonstanten kalles polariserbarhet α:

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}$$

d) Et polart vektorfelt forandrer fortegn under rominversjon (som en ekte vektor skal)
Et aksialt vektorfelt forandrer ikke fortegn under rominversjon (som flatenormaler).

e) Einsteins summekonvensjon: To like indekser skal summeres over (latinske indekser fra 1 til 3, greske indekser fra 0 til 3).

f) Speilingsmetoden er en metode til å løse elektrostatiske problemer i enkle geometrier, ved at man setter opp speilladninger (utenfor det området man studerer) slik at man får oppfylt de riktige grensebetingelsene.

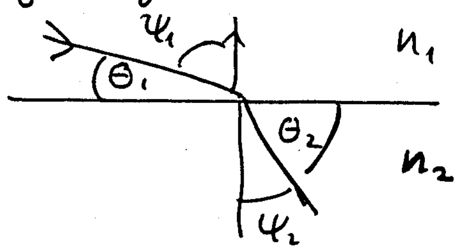
g) Variasjonsmetoden bygger på at potensialet Φ i et volum V minimaliserer integralet

$$\frac{1}{2}\int_V (\nabla\Phi)^2 ,$$

når randbetingelsen er gitt (dvs. at Φ er gitt på randen ∂V)
Kan da tilnærme Φ med prøvefunksjoner som avhenger av variasjonsparametre.

h)

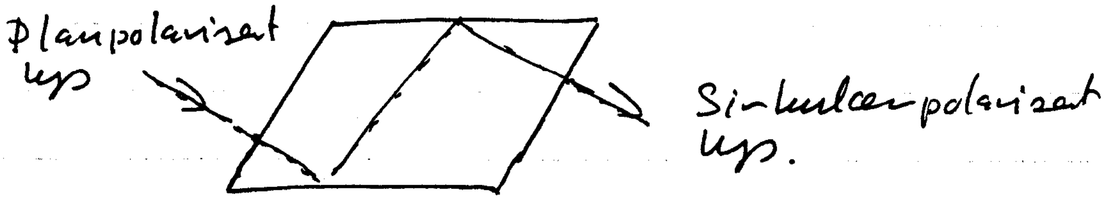
Snell's brytningslov sier hvordan lys brytes ved overgang mellom to medier med forskjellig brytningsindekser n_1, n_2:



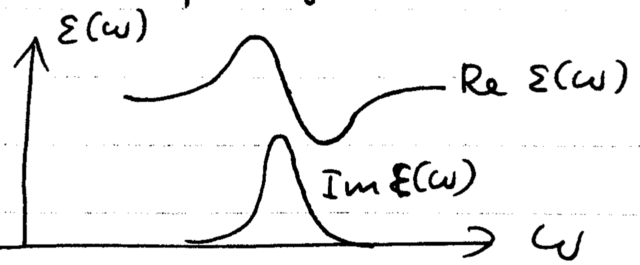
$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

i) Ved Brewsters vinkel blir ikke parallell polarisert lys reflektert. Polaroid solbriller utnytter denne effekten.

j) Fresnels rombe er et prisme som etter to totalrefleksjoner har laget sirkulærpolarisert lys fra planpolarisert lys.



k) Anomal dispersjon vil si at Re $\varepsilon(\omega)$ avtar med ω. Dette opptrer ~~ved~~ nær atomenes resonanser og er forbundet med sterk demping — resonant absorbsjon.



l) Maxwell's spenningstensor angir den elektromagnetiske impulsstrømtettheten. T^{ij} = − (tetthet av impuls i i-retning som strømmer i j-retning).

m) En "fritt" oscillerende ladning med frekvens ω_0 vil pga demping stråle i et lite frekvensintervall rundt ω − ~~tykkelse~~ av ~~typisk~~ ~~tykkelse~~ ~~størrelse~~ tykkelse linje bredden.

n) Thomsons spredning er spredning av lys på fri elektroner.

o) Synkronstråling er stråling fra relativistiske elektroner som akselereres (i f.eks. en synkrotron).

KONTEKSAMEN, 18. august 1993

5

Fag 74316 Elektrisitet og magnetisme 2

LØSNINGSFORSLAG ØVING 1, 1993

Oppgave 2

~~1. Dipolmoment og polariserbarhet~~

(a) Vi har Lorentz' kraftlov

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1}$$

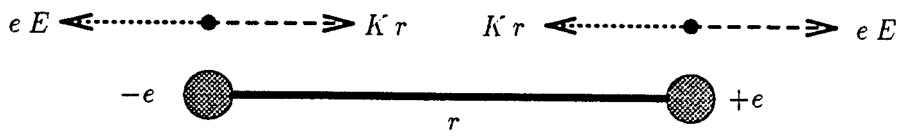
i denne oppgaven med $\vec{B} = 0$.

(b) Den potensielle energien er

$$U(\vec{r}) = -q\,\vec{r}\cdot\vec{E} + U_0, \tag{2}$$

slik at $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) = q\,\vec{E}$. Her er U_0 en betydningsløs konstant,—den avhenger av hvordan vi legger nullpunktet for potensialet.

(c) La $r = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-|$, og $E = |\vec{E}|$. Kraften på protonet (i retning langs $\vec{E}$-feltet) er da



$F_+ = e\,E - K\,r$, slik at man har likevekt når

$$r = \frac{eE}{K}. \tag{3}$$

[Det kan ofte være vanskelig å sette opp de riktige kreftene direkte (noen var f.eks. i tvil om man skulle bruke r eller $\frac{1}{2}r$ i ligningen over). Som en alternativ og mer utvetydig framgangsmåte kan man først beregne den totale potensielle energien til systemet,

$$U_{tot} = \frac{1}{2}K\,(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)^2 - e\,\vec{E}\cdot(\vec{r}_+ - \vec{r}_-). \tag{4}$$

Likevekt inntrer når denne er minimum, dvs. når $K\,(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = e\,\vec{E}$, som før.

De som tar klassisk mekanikk vil lære en videreføring av denne metoden; der starter man med å sette opp en Lagrangefunksjon, og utleder så bevegelsesligningene fra denne ved bruk av et variasjonsprinsipp. Poenget er at det er lettere å skrive ned den riktige Lagrangefunksjonen, som er en skalar størrelse, enn de riktige kreftene (som er vektorielle størrelser).]

(d) Dipolmomentet blir

$$\vec{d} = e\,(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{e^2}{K}\,\vec{E}, \tag{5}$$

og polariserbarheten

$$\alpha = \frac{e^2}{K}. \tag{6}$$

6

~~(c)~~ Her må man huske på at K skal modellere hydrogenatomet, slik det eksisterer allerede *før* det pålegges noe elektrisk felt. Den som prøver å lure størrelsen på $\vec{E}$-feltet inn i overslaget sitt løper rundt på feil jorde etter sin egen hale!
Nå er $\frac{1}{2}Kr^2$ en energi, så K har dimensjon *Energi/lengde*^{2}. Den naturlige energiskalaen for hydrogen-atomet er bindingsenergien

$$E_1 = 1\mathrm{Ry} = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_\infty} = 13.6\ \mathrm{eV} = 2.18 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}, \tag{7}$$

og den naturlige lengdeskalaen er Bohr-radien,

$$a_\infty \equiv \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529\ \text{Å} = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}. \tag{8}$$

K må derfor være av størrelsesorden E_1/a_∞^2, og polariserbarheten av størrelsesorden $e^2\, a_\infty^3/E_1$.
Kommentar: Lenger kommer man igrunnen ikke uten å ha en mer detaljert teori for hydrogenatomet, men en fysiker vil ofte *late* som han (eller en sjelden gang hun) har kommet lenger ved å skrive

$$K = f \times \frac{E_1}{a_\infty^2} = f \times \frac{e^2}{\pi\varepsilon_0 a_\infty^3}, \tag{9}$$

der f er en rent numerisk "jenke-faktor" (fudge factor) av orden 1 (dvs. etsted sånn omtrent mellom 0.1 og 10). For polariserbarheten α kan man da skrive

$$\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} = f^{-1}\, a_\infty^3, \tag{10}$$

mens man oppfordrer en kollega kvantemekaniker til å bestemme f for seg.
Dette har blitt gjort: En skikkelig kvantemekanisk beregning av polariserbarheten til hydrogenatomet kan gjennomføres (under betegnelsen kvadratisk Stark-effekt). Man finner da at $f = \frac{4}{9}$. Denne verdien er i god overensstemmelse med eksperimentelle resultater. Stark-effekt blir behandlet i *P.C.Hemmer: Kvantemekanikk*, s. 139 – 141 (men ikke beregningen av factoren $\frac{4}{9}$ som omtales her).

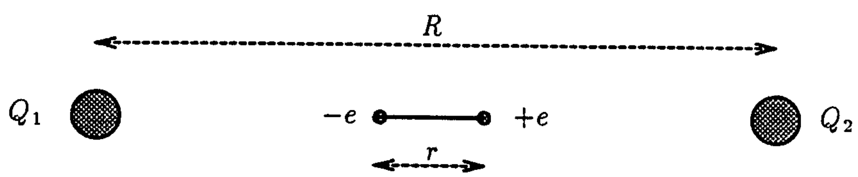
~~**2. Krefter mellom ladninger i et "dielektrisk medium"**~~

(e) ~~(a)~~ Ifølge Coulomb's lov blir kraften på hver ladning

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \tag{11}$$

målt i retning bort fra den andre ladningen. Altså en frastøtende kraft dersom $Q_1 Q_2 > 0$ og en tiltrekkende kraft dersom $Q_1 Q_2 < 0$.

(f) ~~(b)~~ Hvis vi legger et polariserbart atom midt mellom ladningene Q_1 og Q_2,



7

så blir $\vec{E}$-feltet over dette atomet lik

$$\vec{E} = \left(\frac{Q_1 - Q_2}{\pi \varepsilon R^2}\right) \hat{e}_x, \tag{12}$$

der $\hat{e}_x$ er en enhetsvektor som peker mot høyre. Dette vil strekke ut atomet til en lengde

$$r = \frac{e}{K}\,\frac{Q_1 - Q_2}{\pi \varepsilon R^2}, \tag{13}$$

slik at det får et elektrisk dipolmoment

$$d = \frac{e^2}{K}\,\frac{Q_1 - Q_2}{\pi \varepsilon R^2}. \tag{14}$$

Det elektriske feltet fra denne dipolen vil også gi opphav til en kraft på ladningene. På ladningen Q_1 blir denne

$$\frac{eQ_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4}{(R-r)^2} - \frac{4}{(R+r)^2}\right] \approx \frac{eQ_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{16r}{R^3} =$$
$$\frac{16Q_1 d}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Q_1(Q_1 - Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{16e^2}{\pi\varepsilon_0 K R^3}$$

(målt i retning mot høyre) når $r \ll R$. Den totale kraften på Q_1 blir derfor

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 \text{[redacted]} \frac{16\,e^2}{\pi\varepsilon_0 K R^3}\right) + \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\,\frac{16e^2}{\pi\varepsilon_0 K R^3} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 \text{[redacted]} \frac{16\,a_\infty^3}{f\,R^3}\right) + \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\,\frac{16a_\infty^3}{f\,R^3}, \end{aligned} \tag{15}$$

målt i retning mot venstre. Ved en tilsvarende beregning finner vi at den totale kraften på Q_2 blir

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 \text{[redacted]} \frac{16\,e^2}{\pi\varepsilon_0 K R^3}\right) + \frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon}\,\frac{16e^2}{\pi\varepsilon_0 K R^3} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 \text{[redacted]} \frac{16\,a_\infty^3}{f\,R^3}\right) + \frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon}\,\frac{16a_\infty^3}{f\,R^3} \end{aligned} \tag{16}$$

målt i retning mot høyre. Dette resultatet kan tolkes som at kreftene *mellom* ladningene (leddet proprosjonalt med $Q_1 Q_2$) har blitt modifisert på en måte som man kan ta hensyn til ved å innføre en relativ permittivitet

$$\varepsilon_r = \left(1 \text{[redacted]} \frac{16a_\infty^3}{f\,R^3}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Som vi ser opptrer det også en kraft som skyldes at også en enkeltstående ladning induserer et dipolmoment i atomet. Denne er tiltrekkende i retning mot atomet.

(c) ~~I et medium som er homogent fyllt med polariserbare atomer forventer vi at Q_i^2-bidraget til kraften, dvs. det bidraget som skyldes indusert dipolmoment i atomene fra hvert enkeltstående atom, vil forsvinne fordi alle retninger i et homogent medium er likeverdige. Det er derfor ingen retninger denne kraften kan peke i.~~

Oppgave 3

a) $\rho(\vec{x},t) = -e\,\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t))$

$\vec{J}(\vec{x},t) = -e\,\vec{v}_e(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t))$

der

$$\vec{r}_e(t) = R\left[\cos\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_x + \sin\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_y\right]$$

$$\vec{v}_e(t) = v\left[-\sin\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_x + \cos\left(\frac{vt}{R}\right)\hat{e}_y\right]$$

og $e \simeq 1.6\cdot 10^{-19}\,C$ er positronets ladning

ved kjerneregelen:

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = \cancel{e}\frac{d\vec{r}_e}{dt}\,\nabla_x\delta(\vec{x}-\vec{r}_e(t)) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)$$

b)

$$\rho(\vec{k},t) = -e\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -e\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_e(t)}$$

$$\vec{J}(\vec{k},t) = -\,\vec{v}_e(t)\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -e\,\vec{v}_e(t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_e}$$

c) $\vec{r}_e(t)$, $\vec{v}_e(t)$ er periodiske med frekvens

$$\omega = \omega_1 = \frac{v}{R}$$

Vi vil få stråling på denne frekvensen, og dens overharmoniske

$$\omega_n = n\omega_1 .$$

Dipolapproksimasjonen er generelt god når kildens utstrekning (her R) er mye mindre enn strålingens bølgelengde (her $\frac{c}{\omega_n} = \frac{cR}{nv}$.

Altså bør vi ha

$$\frac{nv}{c} << 1 \qquad \text{spesielt} \quad \frac{v}{c} << 1$$

(Når $v/c << 1$ vil også stråling på høyere harmoniske bli undertrykt d)

$$\vec{J}(\vec{k},\omega) \equiv \int dt\, e^{i\omega t}\, \vec{J}(\vec{k},t)$$

$$\simeq -e \int dt\, e^{i\omega t}\, \vec{v}_e(t)$$

Vi innfører kompleks representasjon ~~for~~ $\vec{v}_e(t)$:

$$\vec{v}_e(t) = \mathrm{Re}\; e^{-i\omega_1 t}\,(\hat{e}_y - i\hat{e}_x)$$

og finner (i kompleks rep.)

$$\vec{J}(\vec{k},\omega) = \underbrace{-ev(\hat{e}_y - i\hat{e}_x)}_{\equiv\, \vec{J}(\vec{k})}\, 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)$$

$$\underline{J_\perp^i} = (\delta^{il} - n^i n^l)\, J^l$$

$$\underline{= -ev\left[(\delta^{i2} - n^i n^2) - i(\delta^{i1} - n^i n^1)\right] 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)}$$

[Eventuelt i reell representasjon:

$$\vec{J}(\vec{k},\omega) = -\pi e v\left[\left(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\right)\hat{e}_y - i\left(\delta(\omega-\omega_1) - \delta(\omega+\omega_1)\right)\hat{e}_x\right]$$

$$J_\perp^i(\vec{k},\omega) = -\pi e v\Big[\left(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\right)(\delta^{i2} - \hat{n}^i\hat{n}^2) - i\left(\delta(\omega-\omega_1) - \delta(\omega-\omega_1)\right)(\delta^{i1} - \hat{n}^i\hat{n}^1)\Big]$$

e) Enklest løsn. er å bruke formelen for utstrålt effekt fra ikke-relativistisk akselerert partikkel

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2 \quad \text{der} \quad a^2 = \frac{v^4}{R^2},$$

Fra foregående uttrykk fremgår

$$|\vec{j}_\perp|^2 = \vec{j}_{\perp R}^{\,2} + \vec{j}_{\perp I}^{\,2}.$$

$$\vec{j}_{\perp R}^{\,2} \propto \delta^{i2}\delta^{i2} - 2(\hat{n}^2)^2 + (\hat{n}^2)^2 = 1 - (\hat{n}^2)^2$$

$$= 1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi$$

$$\vec{j}_{\perp I}^{\,2} \propto \delta^{i1}\delta^{i1} - 2(\hat{n}^1)^2 + (\hat{n}^1)^2 = 1 - (\hat{n}^1)^2$$

$$= 1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$|\vec{j}_\perp|^2 \propto 2 - \sin^2\vartheta = 1 + \cos^2\vartheta$$

Prefaktoren er $(ev)^2$. Derav

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega_0^2}{32\pi^2 c}(ev)^2(1+\cos^2\vartheta) \qquad \omega_0 = \frac{v}{R}$$

$$\int d\Omega\,(1+\cos^2\vartheta) = 2\pi\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 e^2 v^4}{6\pi c R^2} = \frac{e^2 v^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^2}$$

f) Utstrålt effekt = Friksjonstap

$$\mathcal{P} = v F_r$$

$$\Rightarrow \underline{F_r} = \frac{\mathcal{P}}{v} = \underline{\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^3}$$

rettet mot bevegelsen.