Eksamen SIF 4060 Elektromagnetisk teori 08.12.2001 - løsningsforslag:

Oppgave 1

a) Direkte innsetting gir: $\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]B_z=0,$ som for de gitte B_z bare

er oppfylt for: $-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2=0$. Dermed fås:

$k=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}$ og med $\omega_{mn}=\pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$ fås den oppgitte formelen. QED! For de gitte løsningene kan ikke begge indeksene m og n samtidig være null.

Konstantene ω_{mn} er TE_{mn}- modenes "cut-off" frekvenser. For $\omega \le \omega_{mn}$ blir k rent imaginær og vi får ikke bølgeforplantning av TE_{mn}- moden, men eksponensiell dempning i z retning.

b) Fasehastighet: $v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}}\ge c$ for $\omega \ge \omega_{mn}$.

Gruppehastighet: $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}=\left(\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}}\right)^{-1}=c\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}\le c$.

c) (Se side 410 i læreboka, Griffiths: "Introduction to electrodynamics")
Vi antar at moden er sammensatt av plane bølger som forplantes under en vinkel θ med z aksen. For hver planbølge har vi bølgetallet ω/c mens $k=(\omega/c)\cos\theta$ er z komponenten av den tilhørende bølgetallsvektoren. Fasehastigheten (i z retning) blir da: $v=\omega/k=c/\cos\theta$. Energiforplantningen skjer nå med hastighet c under en vinkel θ med z aksen. z-komponenten av denne hastigheten er: $v_g=c\cos\theta$. Med det oppgitte uttrykk for $\cos\theta$ er dette de samme resultatene som i b). QED.

d) Cut-off frekvensene er $\nu_{mn}=\frac{\omega_{mn}}{2\pi}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$. Innsatt for tallverdiene fås:

$\nu_{10} = 0.66 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$, $\nu_{20} = 1.32 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$, $\nu_{30} = 1.97 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$, $\nu_{01} = 1.49 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$,

$\nu_{02} = 2.97 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$, $\nu_{11} = 1.62 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$.

Med den gitte frekvensen kan bare fire moder forplantes: mn = 10, 20, 01 og 11.

For at bare én mode skal kunne forplantes må frekvensen være mellom de to laveste cut-off frekvensene, dvs.: $0.66 \cdot 10^{10}\,\text{Hz} \le \nu \le 1.32 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$.

Oppgave 2

a) Potentialet: $V(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \frac{1}{\mathscr{r}} \rho(\mathbf{r}')\,d\tau'$; hvor $\mathscr{r} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, er partikulærløsningen av

Poisson's ligning: $\nabla^2 V = -\rho / \varepsilon_0$.

Hvis potensialet er kjent, er elektrisk felt gitt ved $\mathbf{E} = -\nabla V$, mens ladningsfordelingen gis av Poissons ligning $\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$. For det oppgitte potensialet har vi $V(\mathbf{r}) = V(r)$ og finner at

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\,; \text{ for } r > R, \\[2ex] \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{\mathbf{r}}; \text{ for } r \le R. \end{cases}$$

$$\rho(r) = -\varepsilon_0 \nabla^2 V(r) = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = \begin{cases} 0\,; \text{ for } r > R \\[1ex] \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}; \text{ for } r \le R. \end{cases}$$

Dette er en uniform ladningsfordeling med ladningstetthet $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ i en kule med radius R.

b) Direkte innsetting gir multipolutviklingen:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{\mathscr{r}}\rho(\mathbf{r}')\,d\tau' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}')(r')^m P_m(\cos\theta')\,d\tau' \;.$$

Monopol- og dipolleddene er, respektive: $V_{mono} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; $Q = \displaystyle\int \rho(\mathbf{r})\,d\tau$,

og $V_{dip} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \displaystyle\int \rho(\mathbf{r}') r' \cos\theta'\,d\tau'$.

c) Siden $r'\cos\theta' = \mathbf{r}'\cdot\hat{\mathbf{r}}$ har vi: $V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'d\tau'\right)\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, hvor

$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}d\tau$ er dipolmomentet. QED!

Med dipolmomentet langs z aksen og kulekoordinater har vi

$V_{dip} = V_{dip}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$ og finner feltkomponentene ved bruk av oppgitte

formeler for gradienten i kulekoordinater:

$$E_r = -\frac{\partial V_{dip}}{\partial r} = 2\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_{dip}}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ \text{and}\ E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_{dip}}{\partial\phi} = 0.$$

I koordinat-fri form er dipolfeltet gitt ved:

$$\mathbf{E}_{dip} = -\nabla V_{dip} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - 3\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\nabla r\right]$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\right],$$

siden $\nabla r = \mathbf{r}/r = \hat{\mathbf{r}}$. QED!

d) Entydighetsteoremet ("uniqueness theorem") sier at bare én løsning tilfredsstiller Poissons ligning med gitte randverdier. Speilingsmetoden bygger på at man får de gitte randverdiene tilfredsstilt ved å innføre fiktive ladninger utenfor løsningsområdet, slik at summen av potensialene fra de virkelige og de fiktive ladningene oppfyller de gitte randbetingelsene. Innenfor løsningsområdet er dette den løsningen av Poissons ligning som tilfredsstiller randverdiene. I dette tilfelle, med en punktladning q og et uendelig, ledende plan, blir randverdiene tilfredsstilt ved at man innfører en fiktiv speilladning $-q$ i samme avstand, men på motsatt side av planet. Et ledende plan er en ekvipotensialflate, og løsningen er nå gitt ved:

$$V(x,y,z) = V_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right];\ \text{for } z \geq 0.$$

Her er V_0 potensialet til det ledende planet i $z = 0$. For $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} >> a$ og med dipolmomentet $\mathbf{p} = 2qa\,\hat{\mathbf{z}}$, kan dette skrives som $V(x,y,z) = V_0 + V_{dip}$ hvor V_{dip} er dipolpotensialet i c). Elektrisk felt gis direkte a resultatene i c).

Oppgave 3

a) Maxwells ligninger på integralform følger fra divergens- og curl-teoremene. Vi bruker de generelle ligningene (se oppgitte formeler), de tilsvarende lign. for stoff følger på tilsvarende måte.

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \;\Rightarrow\; \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ (ingen magnetiske monopoler)

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q$ (Gauss lov; $Q = \int \rho d\tau$ er ladningen som omsluttes av Gaussflaten)

$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ (Faradays induksjonslov; $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ er magnetisk fluks gjennom flaten som omsluttes av den lukkede integrasjonsveien)

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_{cond} + I_{displ}$ (Ampères lov; $I_{cond} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ er ledningsstrømmen og $I_{displ} = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a})$ er forskyvningsstrømmen gjennom den flaten som omsluttes av integrasjonsveien)

Tangentialkomponentene (dvs. komponentene i grenseflaten) av **E** og **H**, og normalkomponentene av **B** og **D** er kontinuerlige over en grenseflate mellom to materialer uten frie ladninger.

b) Feltene gis ved $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Fra $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ og $\nabla \times \nabla V \equiv 0$ blir følgende to Maxwells ligninger automatisk oppfylt: $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ og

$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V - \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. QED!

For elektrisk felt $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ beholder vi bare ledd som ikke går raskere mot null enn $1/r$ for $r \to \infty$. Første ledd i uttrykket for V går som $1/r^2$ og kan ikke gi bidrag av ønsket form. Men fra det andre leddet i V får vi bidrag av ønsket form når vi tar gradienten med hensyn på **r** avhengigheten i $\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$. Siden $\nabla r = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ får vi

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 c r} \frac{\nabla r}{c} - \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{4\pi\, r} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{4\pi\, r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi\, r}\left[(\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)\right] = -\frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}_\perp(t-r/c)}{4\pi\, r},$$

hvor $\ddot{\mathbf{p}}_\perp = \ddot{\mathbf{p}} - (\ddot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$ er komponenten av $\ddot{\mathbf{p}}$ loddrett på **r** og vi har brukt at $1/c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$.

c) Det oppgitte uttrykket følger direkte fra resultatet i b) og vektor trippelproduktet (se oppgitte formeler): $\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}) = -[\ddot{\mathbf{p}} - (\ddot{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] = -\ddot{\mathbf{p}}_\perp$.

For magnetfeltet får vi bare et bidrag av ønsket form når vi tar curl med hensyn på **r** avhengigheten til $\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)$, og finner at:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\, r}\nabla\times\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\nabla r\times\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}_\perp(t-r/c).$$

Her har vi brukt at $(\nabla\times\dot{\mathbf{p}})_x = \frac{\partial\dot{p}_z}{\partial y} - \frac{\partial\dot{p}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\ddot{p}_z - \frac{\partial r}{\partial z}\ddot{p}_y\right) = -\frac{1}{c}(\nabla r\times\ddot{\mathbf{p}})_x$, osv.,

som gir: $\nabla\times\dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{c}\nabla r\times\ddot{\mathbf{p}}$.

d) Fra resultatene i b) og c) ser vi at **E**, **B**, og $\hat{\mathbf{r}}$ utgjør et ortogonalt høyrehåndssystem på vanlig måte. Derfor er Poyntings vektor radielt rettet og gitt ved:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0\ddot{p}_\perp^2(t-r/c)}{(4\pi r)^2 c}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0\ddot{p}^2(t-r/c)}{(4\pi r)^2 c}\sin^2\theta\;\hat{\mathbf{r}},$$

hvor vi har brukt at $\ddot{p}_\perp = \ddot{p}\sin\theta$ og θ er vinkelen mellom $\ddot{\mathbf{p}}$ og **r**.

Når vi integrerer **S** over en kule med radius r får vi for total utstrålt effekt:

$$P = \oint\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0\ddot{p}^2(t-r/c)}{(4\pi)^2 c}\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0\ddot{p}^2(t-r/c)}{6\pi c},$$

siden $d\mathbf{a} = r^2\sin\theta\, d\theta d\phi\,\hat{\mathbf{r}}$. θ integralet beregnes enklest ved å innføre

$x = \cos\theta$ som ny integrasjonsvariabel: $\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.