**Eksamen 27.11.2002 - Løsningsforslag:**

## Oppgave 1

a) Ladningsbevarelsen $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ følger fra Maxwells ligninger

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ og $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho / \varepsilon_0$, og av vektoridentiteten $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0$. Da

har vi: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right) \equiv 0$. QED!

Med $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ innsatt i ladningsbevarelsen fås $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \varrho$ slik at

tidsavhengigheten til $\varrho$ oppfyller: $\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Direkte integrasjon gir følgende

løsning for $t \geq 0$: $\varrho(\mathbf{r},t) = \varrho_0(\mathbf{r}) \exp\left( -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t \right)$, hvor $\varrho_0(\mathbf{r})$ er ladningsfordelingen ved

$t = 0$. Vi ser at en gitt ladningsfordeling svært raskt går mot null (tidskonstanten er $\varepsilon_0 / \sigma = 0.88 \cdot 10^{-12}$ s selv for en nokså dårlig leder med $\sigma = 1$ S/m).

Fri ladninger finnes ikke i det indre av ledende materialer fordi fri ladninger med samme fortegn frastøter hverandre og vil ledes til overflaten av materialet. Samtidig vil fri ladninger med motsatt fortegn tiltrekkes til hverandre og bli nøytralisert.

b) $$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[ \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right]$$

Innsatt for $\nabla \times \mathbf{E}$ og $\nabla \times \mathbf{B}$ fra Maxwells ligninger fås:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \mathbf{B} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left( \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] = -\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right] - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial u}{dt} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J},$$

som direkte gir den oppgitte ligningen. QED!

Ligningen uttrykker energibevarelse (elektromagnetisk og mekanisk). For et infinitesimalt volumelement beskriver første ledd ($\partial u / \partial t$) tilført elektromagnetisk effekt (energiøkning pr. tidsenhet), andre ledd ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$) beskriver effekt overført til mekanisk energi for ladningene i volumet (f.eks. ved ohmske tap), mens siste ledd ($\nabla \cdot \mathbf{S}$) beskriver den effekten (energistrømmen) som strømmer ut av volumet.

c) Feltene gis ved $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Fra $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ og $\nabla \times \nabla V \equiv 0$ blir følgende to av Maxwells ligninger automatisk oppfylt: $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ og

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \text{ QED!}$$

Fra de to siste av Maxwells ligninger får vi at $V$ og $\mathbf{A}$ må oppfylle:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0 \Rightarrow -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \varrho/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\varrho/\varepsilon_0. \tag{A}$$

og: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \left( \nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right). \tag{B}$$

d) En justeringstransformasjon ("gauge transform") er enhver endring av potensialene $V$ og $\mathbf{A}$ som *ikke* endrer feltene: $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Når vi setter inn fra Lorentzbetingelsen, $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$, i lign. (A) og (B) over, får vi direkte de oppgitte bølgeligningene:

$$\nabla^2 V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\varrho/\varepsilon_0 \quad \text{and} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \text{QED!}$$

Løsningene for $V$ og $\mathbf{A}$ er *ikke* uavhengige av hverandre, fordi de to ligningene bare er gyldige når $V$ og $\mathbf{A}$ oppfyller Lorentzbetingelsen. Da vil også $\varrho$ og $\mathbf{J}$ i de to bølgeligningene automatisk oppfylle ladningsbevarelsen.

**Oppgave 2**

a) Randverdi på kula, $r = R$: $V(R,\theta) = 0$ (jordet kule).
Randverdi for $r \to \infty$: $V(r,\theta) \to V_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$.

Randverdien for $r = R$ gir:

$$V(R,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m R^m + \frac{B_m}{R^{m+1}}\right)P_m(\cos\theta) = 0,$$ som skal være oppfylt for alle $\theta$. Det kan bare være tilfelle dersom $A_m R^m + \frac{B_m}{R^{m+1}} = 0$ slik at: $B_m = -A_m R^{2m+1}$.

Randverdiene for $r \to \infty$ gir: $A_1 = -E_0$ og $A_m = 0$ for $m \neq 1$.
Dermed får vi bare bidrag for $m = 1$: $A_1 = -E_0$ og $B_1 = E_0 R^3$. Innsatt fås:

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta.$$ QED!

b) Her er flatenormalen i radiell retning, så den indusert flateladningstetthet er:

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=R} = \varepsilon_0 E_0 \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\Big|_{r=R} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta.$$

c) Potensialet er: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right],$$

hvor $\sqrt{x^2+y^2+(z\pm d/2)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2 \pm dz + d^2/4} = \sqrt{r^2 \pm dz + d^2/4}$.
For $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} >> d$ kan vi bruke tilnærmelsen

$$\sqrt{x^2+y^2+(z\pm d/2)^2} = \sqrt{r^2 \pm dz + d^2/4} \approx r\left(1 \pm \frac{dz}{2r^2}\right) = r \pm \frac{dz}{2r},$$ som innsatt gir:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r - dz/(2r)} - \frac{q}{r + dz/(2r)}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdz/r}{r^2 - (dz)^2/(2r)^2}$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdz}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

når vi bruker at $\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}} = qd\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = qd\cos\theta$. QED!

d) Svaret i a) kan skrives som

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta = -E_0 z + \frac{E_0 R^3\cos\theta}{r^2} = V_0 + V_{ind},$$ hvor

$V_{ind} = \frac{E_0 R^3 \cos\theta}{r^2}$. Dette er et rent dipolpotensial som skyldes den induserte flateladningen på kula.
Ved sammenligning av uttrykkene ser vi at det induserte dipolmomentet er:
$\mathbf{p}_{ind} = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3 \hat{\mathbf{z}}$. (Proporsjonalt med kulas volum og med $E_0$)

## Oppgave 3

a) Direkte innsetting gir: $\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]B_z=0$, som for de gitte $B_z$ bare

er oppfylt for: $-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2=0$. Dermed fås:

$k=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}$ og med $\omega_{mn}=\pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$ fås den oppgitte

formelen. QED! For de gitte løsningene kan ikke begge indeksene $m$ og $n$ samtidig være null.

Konstantene $\omega_{mn}$ er $TE_{mn}$ modenes "cut off" frekvenser. For $\omega \le \omega_{mn}$ blir $k$ rent imaginær og vi får ikke bølgeforplantning av $TE_{mn}$- moden, men eksponensiell dempning i $z$ retning.

b) Fasehastighet: $v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}}\ge c$ for $\omega\ge\omega_{mn}$.

Gruppehastighet: $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}=\left(\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}}\right)^{-1}=c\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}\le c$ .

c) (Se side 410 i læreboka, Griffiths: "Introduction to electrodynamics")
Vi kan anta at moden er sammensatt av plane bølger som alle forplantes under en gitt vinkel $\theta$ med $z$ aksen. For hver planbølge har vi bølgetallet $\omega/c$ mens $k=(\omega/c)\cos\theta$ er $z$ komponenten av den tilhørende bølgetallsvektoren. Fasehastigheten (i $z$ retning) blir da: $v=\omega/k=c/\cos\theta\ge c$. Energiforplantningen skjer nå med hastighet $c$ under en vinkel $\theta$ med $z$ aksen. $z$-komponenten av denne hastigheten er:
$v_g=c\cos\theta\le c$. Med det oppgitte uttrykk for $\cos\theta$ er dette de samme resultatene som i b). QED.

d) Cut-off frekvensene er $\nu_{mn}=\frac{\omega_{mn}}{2\pi}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$. Innsatt for tallverdiene fås:

$\nu_{10}=0.652\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$, $\nu_{20}=1.304\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$, $\nu_{30}=1.957\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$, $\nu_{01}=1.485\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$,

$\nu_{02}=2.97\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$, $\nu_{11}=1.622\cdot10^{10}\,\mathrm{Hz}$.

Med den gitte frekvensen kan bare tre moder forplantes: $mn$ = 10, 20 og 01.

For at bare én mode skal kunne forplantes må frekvensen være mellom de to laveste cut-off frekvensene, dvs.: $0.652 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz} \leq \nu \leq 1.304 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ .