**Eksamen SIF 4060: Elektromagnetisk teori, Torsdag 25. november 1999**
**Løsningsforslag**

## <u>Oppgave 1</u>

a) Av symmetrigrunner må feltet være radielt rettet ut fra linjeladningen. Når vi legger en sylindrisk Gauss-flate med radius $r$ og lengde $l >> r$ rundt linjeladningen får vi ved hjelp av Gauss' lov: $\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \varepsilon E(r)2\pi rl = q = \lambda l$ . Dermed fås:

$E(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$, og direkte integrasjon gir: $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r + A$. QED.

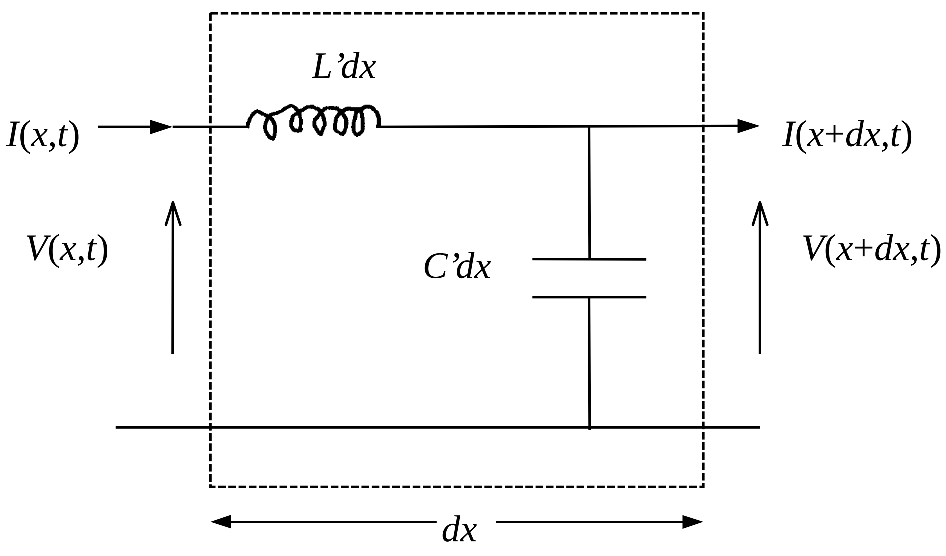
Ekvipotensialflatene er konsentriske sylindere.

b) De to konsentriske lederne er ekvipotensialflater og entydighetsteoremet (vi har én og bare én løsning av Laplaces ligning for gitte randverdier) innebærer at potensialet mellom dem er gitt av løsningen i a). Spenningsforskjellen mellom de to lederne er:

$V = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$, og kapasitans pr. lengdeenhet blir: $C' = \frac{\lambda}{V} = 2\pi\varepsilon \Big/ \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Induktans pr lengdeenhet: $L' = \mu\varepsilon / C' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

c) Ekvivalentskjema: (Induktans $L'dx$ inngår i serie, kapasitans $C'dx$ inngår i parallell.)



Spenningsfallet gis av induktansen $L'dx$: $V(x,t)-V(x+dx,t)=-\frac{\partial V}{\partial x}dx = L'dx\frac{\partial I}{\partial t}$,

strømtapet gis av kapastiansen $C'dx$: $I(x,t)-I(x+dx,t)=-\frac{\partial I}{\partial x}dx = C'dx\frac{\partial V}{\partial t}$.

Dermed følger de oppgitte ligningene: $\frac{\partial V}{\partial x}=-L'\frac{\partial I}{\partial t}$ og $\frac{\partial I}{\partial x}=-C'\frac{\partial V}{\partial t}$. QED

d) Deriverer hver av ligningene én gang til mhp. $x$ og setter inn fra den andre lign. Det gir: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-L'\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial x}=L'C'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=-C'\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}=L'C'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$, og vi ser at $V$ og $I$ oppfyller samme bølgeligning: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}-L'C'\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}=0;\ \Psi = V, I.$ QED

Ved direkte innsetting ser vi at denne er oppfylt for de oppgitte løsningene når $k=\omega\sqrt{L'C'}$, dvs. fasehastigheten er $c_f=\omega/k=1/\sqrt{L'C'}=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Når de oppgitte løsningene settes inn i de to ligningene i c) fås: $kV_0=\omega L' I_0$ og $kI_0=\omega C' V_0$, som gir $z_0=V_0/I_0=\omega L'/k = k/(\omega C')=\sqrt{L'/C'}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi}$ når vi setter inn resultatet fra b). Tallsvar: $c_f=1/\sqrt{\varepsilon\mu_0}=1/\sqrt{2\varepsilon_0\mu_0}=c/\sqrt{2}=2.121\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$,

$$z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\sqrt{2}\pi}=\frac{120\ln(8)}{2\sqrt{2}}\Omega = 88.22\,\Omega.$$

**Oppgave 2**

a) Fra $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ og $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\equiv 0$ følger at $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{D}=0.$

Innsatt fra $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ følger ladningsbevarelsen: $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$. QED.

$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}=(\sigma/\varepsilon)\mathbf{D}$ gir $\nabla\cdot\mathbf{J} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{D} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\rho$ , som innsatt i ladningsbevarelsen gir:

$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0.$ Denne har løsningen: $\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r})\exp(-\sigma\, t/\varepsilon); t \geq 0.$

Vi ser at enhver ladningsfordeling $\rho_0(\mathbf{r}) \neq 0$ vil forsvinne i løpet av kort tid (>> $\varepsilon/\sigma$). Det skyldes at like ladninger frastøter hverandre slik at frie ladninger i et ledende materiale etter svært kort tid bare vil finnes på overflaten og ikke i det indre av materialet.

b) Ved direkte innsetting av den oppgitte planbølgeløsningen ser man at bølgeligningen er oppfylt for: $(-\tilde{k}^2 + i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon)\tilde{\mathbf{E}}_0 = 0$. QED. Dispersjonsrelasjonen er dermed:

$\tilde{k} = \tilde{k}(\omega) = k + i\kappa = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 + i\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}}$. Kvadratet av denne gir:

$k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma$, dvs. to ligninger med to ukjente: $k^2 - \kappa^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ og $2k\kappa = \omega\mu\sigma$. Når vi kvadrerer den andre av disse og innfører $x = k^2$ og $y = \kappa^2$ fås $x - y = \omega^2\mu\varepsilon$ og $xy = (\omega\mu\sigma)^2/4$, som gir $y = x - \omega^2\mu\varepsilon$ og

$x^2 - \omega^2\mu\varepsilon x - (\omega\mu\sigma)^2/4 = 0.$ Løsningene er: $x = \dfrac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right)$ og

$y = x - \omega^2\mu\varepsilon = \dfrac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right)$. Vi har $y = \kappa^2 > 0$ og må velge den positive

roten. Da fås: $k = \sqrt{x} = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right]}$ og $\kappa = \sqrt{y} = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]}$.

c) For $\omega \ll \omega_0 = \sigma/\varepsilon$ har vi $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$ og får: $k \approx \kappa \approx \sqrt{\mu\sigma\omega/2}$. Dvs $\omega = 2k^2/(\mu\sigma)$

som gir fasehastighet: $c_f = \dfrac{\omega}{k} \approx \dfrac{2k}{\mu\sigma} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\sigma}}$, gruppehastighet: $c_g = \dfrac{d\omega}{dk} \approx \dfrac{4k}{\mu\sigma} = 2c_f$, og inntrengningsdybde: $\delta = \dfrac{1}{\kappa} \approx \sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$. For $\omega >> \omega_0$ (trykkfeil i oppgavetekst, men korrigert på eksamen) bruker vi tilnærmelsen: $\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \approx 1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2$, som gir:

$k \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ og $\kappa \approx \dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$. Her er $c_f \approx c_g \approx 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ (dvs. dispersjonen er neglisjerbar)

og $\delta = 1/\kappa \approx \dfrac{2}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$.

d) Frekvensen er $\nu = \omega/2\pi = 1$ MHz. Vi har: $\nu_0 = \omega_0/2\pi = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon}$ =12.73 GHz (>> $\nu$).

Derfor kan vi bruke resultatene i c) for $\omega << \omega_0$. Da har vi:

$c_f \approx \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu_0\sigma}} = \sqrt{\dfrac{4\pi\nu}{\mu_0\sigma}} = 3.162\cdot 10^6$ m/s, $c_g = 2c_f = 6.324\cdot 10^6$ m/s, og

$\delta = \dfrac{1}{\kappa} \approx \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\sigma\pi\nu}} = 0.503$ m. Bølgelengden er $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\delta = 3.162$ m. I vakuum vil vi ved samme frekvens ha bølgelengden: $\lambda = c/\nu = 300$ m.

**Oppgave 3**

a) To punktladninger $\pm q$ plassert ved $\mathbf{r} = \pm\mathbf{d}/2$ har dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Potensialet blir

$V(\mathbf{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\left|\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{d}\right|} - \dfrac{1}{\left|\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{d}\right|}\right)$. For $r >> d$ kan vi bruke tilnærmelsen:

$\left|\mathbf{r}\pm\frac{1}{2}\mathbf{d}\right| = \sqrt{r^2 \pm \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \frac{1}{4}d^2} \approx r\left(1 \pm \frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}/r^2\right)$. Innsatt fås:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}/r^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}/r^2}\right) = \frac{q\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{d})^2/r^4} \approx \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$ QED.

b)

$$\mathbf{E} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + 3\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\nabla r$$

$$= 3\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{p}\right]; \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r.$$

c) Feltene er gitt ved $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Vi skal bare ha med ledd som ikke går raskere mot null enn $1/r$ for store $r$. Første ledd i uttrykket for $V$ går som $1/r^2$ og kan ikke gi bidrag som går som $1/r$. Det andre leddet i $V$ og uttrykket for **A** går som $1/r$, men derivasjon mhp. den *eksplisitte* **r** avhengigheten gir bidrag som går som $1/r^2$. De eneste feltbidragene som *kan* gå som $1/r$ er de som følger ved derivasjon med hensyn på de *implisitte* **r** og $t$ avhengighetene som inngår gjennom retardert tid: $t_0 = t - r/c$. Dermed fås:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\nabla t_0 - \frac{\mu_0\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi r}\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{cr}\right) - \frac{\mu_0\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[(\ddot{\mathbf{p}}(t_0)\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \ddot{\mathbf{p}}(t_0)\right] = -\frac{\mu_0\ddot{\mathbf{p}}_\perp(t_0)}{4\pi r};$$

hvor $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r, \ddot{\mathbf{p}}_\perp = \ddot{\mathbf{p}} - (\ddot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r$ er transversalkomponenten av $\ddot{\mathbf{p}}$ - dvs. komponenten loddrett på **r**, og vi har brukt at $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$. For **B** feltet fås:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\frac{\mu_0\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi r} = \nabla t_0 \times \frac{\mu_0\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi r} = -\frac{\mu_0\mathbf{e}_r\times\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi rc} = -\frac{\mu_0\mathbf{e}_r\times\ddot{\mathbf{p}}_\perp(t_0)}{4\pi rc}$$

Det siste uttrykket følger av at bare transversalkomponenten bidrar til vektorproduktet. Fra resultatene over ser vi at $\mathbf{e}_r$, **E**, og **B** utgjør et ortogonalt høyrehåndssystem, slik at $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$ må være radielt rettet. QED,

d) I vakuum har vi: $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ og $\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. For plane bølger:

$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)], \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}_0 \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$, fås direkte:

$\nabla\cdot\mathbf{E} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E},\ \nabla\times\mathbf{E} = i\mathbf{k}\times\mathbf{E},$ and $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{B}.$ Innsatt fås de oppgitte uttrykkene:

$\omega\mathbf{B} = \mathbf{k}\times\mathbf{E}$ og $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0.$ QED