NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Ola Hunderi
Telefon: 73 59 34 11

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN TFY4240 ELEKTROMAGNETISK TEORI
Lørdag 18. desember 2004 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Eksamen bestod av 3 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som teller like mye under bedømmelsen.

Sensuren kan ventes ca 20. januar.

OPPGAVE 1 (Teller 30%)

a) Innsetting av den oppgitte løsningen gir

$$\left(-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)E_z=0$$

og da vi selvsagt må forlange $E_z \neq 0$, finner vi

$$k=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\left(\frac{m^2\pi^2c^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2c^2}{b^2}\right)}$$

Cutoff-frekvensene ω_{mn} er altså

$$\omega_{mn}=\pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

På de indre grenseflatene må vi ha $E_{||}=0$, dvs $E_z(x,y=0)=E_z(x,y=b)=E_z(x=0,y)=E_z(x=a,y)=0$. Det betyr f.eks. at vi må ha både $\sin m\pi=0$ og $\sin n\pi=0$, med andre ord m og n må være hele tall. Dessuten kan ingen av dem være lik null, for da forsvinner E_z overalt inne i bølgelederen, som med utgangspunktet $B_z=0$ gir en fullstendig transversal elektromagnetisk bølge (en såkalt TEM-mode). Det kan bevises at vi da må ha $\boldsymbol{E}=0$ inne i bølgelederen, altså ingen bølge i det hele tatt. (Se Griffiths, s. 407)

b) Fasehastighet:

$$v_f=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-\omega_{mn}^2/\omega^2}}$$

Gruppehastighet:

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{1}{dk/d\omega}=\frac{1}{\omega(\omega^2-\omega_{mn}^2)^{-1/2}/c}=c\sqrt{1-\omega_{mn}^2/\omega^2}$$

c) Bare moder (m,n) med $\omega_{mn}<\omega$ kan forplantes i bølgelederen. Her er

$$\omega=2\pi f=2\pi\frac{c}{\lambda}=2\pi\cdot 3\cdot 10^8/0.02=30\pi\cdot 10^9\ \mathrm{Hz}$$

Cutoff-frekvensene er, med $b=a=0.04$ m:

$$\omega_{mn}=\frac{\pi c}{a}\sqrt{m^2+n^2}=7.5\pi\cdot 10^9\cdot\sqrt{m^2+n^2}\ \mathrm{Hz}$$

Dermed må vi ha $\sqrt{m^2+n^2}<4$ eller $m^2+n^2<16$. Dette er oppfylt for modene $(m,n)=(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,3),(3,2)$, i alt 8 moder.
Forplantning av kun 1 TM-mode betyr at bølgens vinkelfrekvens ω må ligge mellom ω_{11} og ω_{12}. Ettersom $\lambda=2\pi c/\omega$ betyr det at

$$\frac{2\pi c}{7.5\pi\cdot 10^9\cdot\sqrt{2}}>\lambda>\frac{2\pi c}{7.5\pi\cdot 10^9\cdot\sqrt{5}}$$

med $c=3\cdot 10^8$ og λ i meter. Med bølgelengden i cm må vi ha

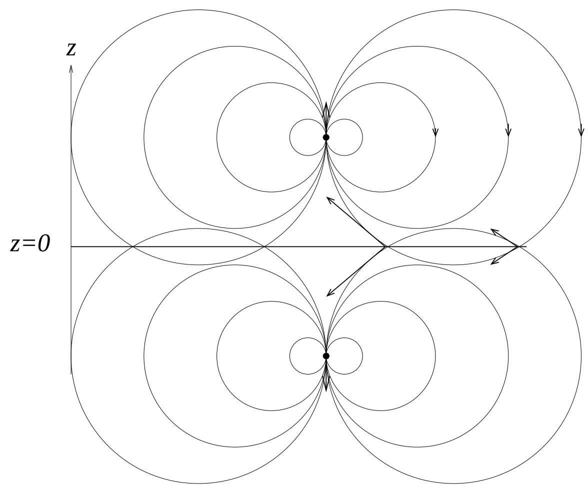
$$\frac{8}{\sqrt{5}}<\lambda<\frac{8}{\sqrt{2}}$$

dvs

$$3.58 \text{ cm} < \lambda < 5.66 \text{ cm}$$

OPPGAVE 2 (Teller 30%)

a) Skisse av magnetiske feltlinjer fra dipol $\boldsymbol{m}$ i $z = h$ og speildipol $-\boldsymbol{m}$ i $z = -h$:



I to posisjoner i grenseflaten ($z = 0$) er det tegnet inn bidrag til $\boldsymbol{B}$ fra de to dipolene. Det er lett å se at speildipolen må peke nedover for å gi $B_z = 0$ i grenseflaten.

b) Vi må finne $\boldsymbol{B}$ i avstand z fra speildipolen $-m\,\hat{z}$. (Til slutt kan vi sette $z = 2h$, som er den faktiske avstanden mellom de to dipolene.) Vi har oppgitt uttrykket for magnetfelt i avstand $\boldsymbol{r}$ fra dipol $\boldsymbol{m}$. Her er $\boldsymbol{m} = -m\,\hat{z}$ og $\boldsymbol{r} = z\,\hat{z}$, mens $\hat{r} = \hat{z}$. Innsetting gir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(-m\,\hat{z} \cdot \hat{z})\hat{z} + m\,\hat{z}}{z^3} \\ &= -\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}\,\hat{z} \end{aligned}$$

I denne avstanden vil dipolen $m\,\hat{z}$ ha potensiell energi

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 m^2}{2\pi z^3}$$

slik at den påvirkes av en magnetisk kraft

$$\boldsymbol{F}_m = -\nabla U = -\frac{dU}{dz}\,\hat{z} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4}\,\hat{z}$$

Her er som sagt avstanden z lik $2h$, slik at

$$F_m = \frac{3\mu_0 m^2}{32\pi h^4}$$

rettet oppover. Dipolen svever i høyden h når denne magnetiske kraften balanseres av tyngdekraften Mg:

$$\begin{aligned} Mg &= \frac{3\mu_0 m^2}{32\pi h^4} \\ \Rightarrow h &= \left(\frac{3\mu_0 m^2}{32\pi Mg}\right)^{1/4} \\ \Rightarrow A &= \frac{3\mu_0}{32\pi g} \end{aligned}$$

c) Her bruker vi den oppgitte magnetiske feltstyrken i avstand s fra en uendelig lang, rett strømførende leder som en tilnærmelse:

$$B(s) \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Avstanden er $s = 2h$. Den frastøtende kraften mellom de to dipolene blir dermed (tilnærmet) lik

$$F_m \simeq I \cdot 2\pi a \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi h} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2h}$$

som igjen skal balanseres av tyngdekraften Mg, slik at

$$h = \frac{\mu_0 I^2 a}{2Mg}$$

Med $m^2 = \pi^2 a^4 I^2$ kan dette omskrives til

$$h = \frac{\mu_0 m^2}{2Mg\pi^2 a^3}$$

slik at koeffisienten C blir

$$C = \frac{\mu_0}{2g\pi^2 a^3}$$

OPPGAVE 3 (Teller 40%)

a) Her er elektronet utsatt for 3 krefter: Fjærkrafta $-kx$, friksjonskrafta $-\lambda\, dx/dt$ og den elektriske krafta $-eE_0 \exp(-i\omega t)$. Ifølge Newtons 2. lov skal summen av disse være lik $ma = m\, d^2x/dt^2$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda\frac{dx}{dt} - kx - eE_0 \exp(-i\omega t)$$

Vi tar tipset i oppgaven og antar $x(t)$ på formen $x_0 \exp(-i\omega t)$. Det betyr selvsagt at x_0 representerer amplituden for utsvinget fra elektronets likevektsposisjon. Innsetting gir da

$$-\omega^2 m x_0 - i\lambda\omega x_0 + kx_0 = -eE_0$$

der vi har strøket felles faktor $\exp(-i\omega t)$. Altså er

$$x_0 = \frac{-eE_0}{k - \omega^2 m - i\lambda\omega} = \frac{-e/m}{k/m - \omega^2 - i(\lambda/m)\omega}\, E_0$$

Med definisjonen $p = qx = -ex$ av elektrisk dipolmoment følger det at $p(t) = p_0 \exp(-i\omega t)$ med kompleks amplitude

$$p_0 = -ex_0 = \frac{e^2/m}{k/m - \omega^2 - i(\lambda/m)\omega} E_0$$

Dette er på den oppgitte formen, med

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

og

$$\gamma = \frac{\lambda}{m}$$

b) Med N slike atomer pr volumenhet blir den elektriske polariseringen

$$P = Np = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E$$

Fra de oppgitte definisjonene av χ_e og ε_r følger det da at

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Innsetting av oppgitt planbølgeform for $\boldsymbol{E}$ i den oppgitte bølgeligningen gir

$$\begin{aligned} (i\tilde{k})^2 &= \varepsilon\mu_0(-i\omega)^2 \\ \tilde{k} &= \sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\omega \end{aligned}$$

Ettersom $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ er en kompleks størrelse, har vi dermed vist at slike plane bølger med komplekst bølgetall $\tilde{k}$ oppfyller bølgeligningen.

c) For å bestemme gassens brytningsindeks n og absorpsjonskoeffisient α bruker vi først opplysningen om at gassen har lav tetthet N, eller $\chi_e \ll 1$. Dermed kan vi rekkeutvikle kvadratroten i uttrykket for $\tilde{k}$ til laveste orden i χ_e:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\varepsilon\mu_0}\,\omega \\ &= \sqrt{1+\chi_e}\,\omega\,\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \\ &\simeq \left(1 + \frac{1}{2}\chi_e\right)\omega/c \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\chi_e + \frac{i}{2}\mathrm{Im}\chi_e\right)\omega/c \end{aligned}$$

Dermed er brytningsindeksen

$$n = \frac{c}{\omega}\mathrm{Re}\tilde{k} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\chi_e = 1 + \frac{(Ne^2/2m\varepsilon_0)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

og absorpsjonskoeffisienten

$$\alpha = 2\mathrm{Im}\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\mathrm{Im}\chi_e = \frac{(Ne^2/m\varepsilon_0)\gamma\omega^2/c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Her har vi brukt at

$$\begin{aligned}\chi_e &= \frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\\ &= \frac{(Ne^2/m\varepsilon_0)(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\end{aligned}$$

slik at

$$\mathrm{Re}\chi_e = \frac{(Ne^2/m\varepsilon_0)(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

og

$$\mathrm{Im}\chi_e = \frac{(Ne^2/m\varepsilon_0)\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}$$

d) Dersom vi bytter ut $F_d = -\lambda\, dx/dt$ med $F_r = m\tau da/dt = m\tau d^3x/dt^3$ må vi fremdeles kunne bruke samme form på $x(t)$. Der vi fikk $i\lambda\omega x_0$ når vi brukte F_d, vil vi nå få $m\tau(-i\omega)^3x_0 = im\tau\omega^3x_0$. Det må bety at det oppgitte uttrykket for p_0 i punkt a blir akkurat som før, bortsett fra at $\gamma\omega = \lambda\omega/m$ erstattes av $\tau\omega^3$.