Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Ola Hunderi
Tlf.: 93411

**EKSAMEN I FAG 74435 - FASTE STOFFERS FYSIKK 2**

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

15 august 2000

Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling
S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae

**Oppgave 1**

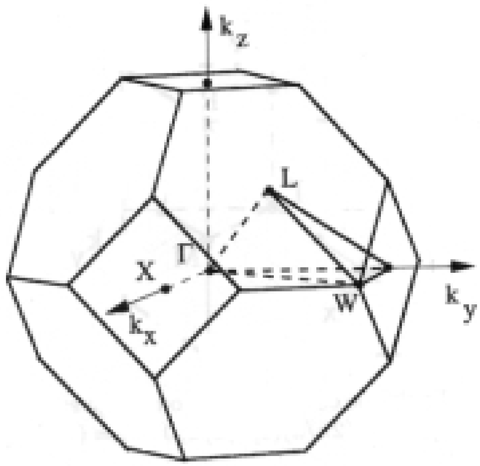
a) Det flate sentrerte kubiske gitteret har resiproke gittervektorer gitt som

$$G_1 = \frac{2\pi}{a}(1, -1, 1)$$

$$G_2 = \frac{2\pi}{a}(1, 1, -1)$$

$$G_3 = \frac{2\pi}{a}(-1, 1, 1)$$

Figur 1 viser den første Brillouin sonen . Vis at en kule innskrevet i første Brillouin sone vil berøre en av de hexagonale flatene først. Vis at radius av denne kula vil være $k_i = \frac{\pi\sqrt{3}}{a}$. Beregn forholdet mellom $k_i$ og radius av den fri-elektron Fermikula for ett elektron per atom.




Figur 1

b) Bølgevektoren k kan antas å være vinkelrett på et speilplan. Det innebærer at energien E(k) er symmetrisk om dette planet. Videre er E(k) en periodisk funksjon av de resiproke gittervektorer. Disse to betingelsene kan skrives som

$$E(k) = E(-k)$$
$$E(k) = E(k+G)$$

Bruk disse to betingelsene til å vise at $\frac{\partial E}{\partial k} = 0$ på en sonegrense.

c) De primitive gittervektorene for fcc gitteret er

$$R_1 = \frac{a}{2}(1, 0, 1)$$

$$R_2 = \frac{a}{2}(1, 1, 0)$$

$$R_3 = \frac{a}{2}(0, 1, 1)$$

Bruk dette til å vise at det laveste energibandet i "Tight binding " approximasjonen er gitt av et uttrykk av formen

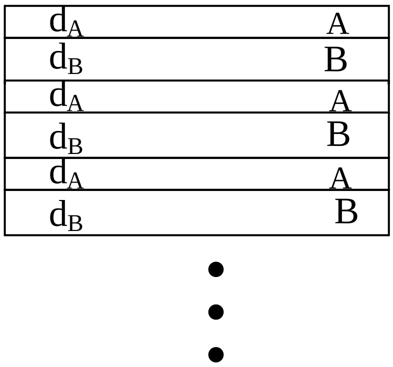
$$E(k) = E_o - \alpha - 4\gamma\left(\cos\frac{k_x a}{2}\ \cos\frac{k_y a}{2} + \cos\frac{k_x a}{2}\cos\frac{k_z a}{2} + \cos\frac{k_y a}{2}\cos\frac{k_z a}{2}\right)$$

Vis at dette energibåndet oppfyller betingelsen om at energibåndet er vinkelrett på sonegrensen. Ta den hexagonale sone-flaten eller punktet X som eksempel.

**Oppgave 2**

a) Ta utgangspunkt i Maxwells ligninger og vis at følgende sammenheng eksisterer mellom dielektrisitetskonstanten ε og konduktiviteten σ: $\varepsilon = 1 + \dfrac{i\sigma}{\varepsilon_o \omega}$

b) Betrakt et uendelig supergitter som består av to materialer A og B slik som vist i figur 2.




Figur 2

Tykkelsen av de individuelle lagene er $d_A$ og $d_B$ og de tilsvarende dielektrisitetskonstantene er $\varepsilon_A$ og $\varepsilon_B$. Tykkelsen av de individuelle lagene er mye mindre enn lysets bølgelengde slik at feltet er tilnærmet konstant over tykkelsen av et lag. Vi kan da definere en såkalt effektiv dielektrisk ε konstant for det sammensatte materialet. Denne effektive dielektrisitetskonstanten vil være forskjellig for lys polarisert med E-feltet henholdsvis parallelt med, og vinkelrett på lagene. Vis at den effektive dielektrisitetskonstanten for lys polarisert parallelt med lagene er gitt av

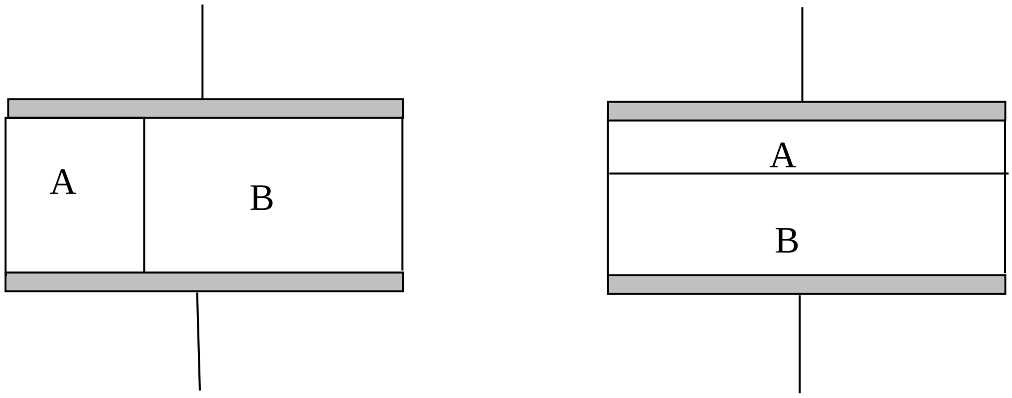
$$\varepsilon_{||} = \frac{d_A}{d_A + d_B}\varepsilon_A + \frac{d_B}{d_A + d_B}\varepsilon_B$$

og for lys polarisert vinkelrett på lagene er

$$\frac{1}{\varepsilon_\perp} = \frac{d_A}{d_A + d_B}\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{d_B}{d_A + d_B}\frac{1}{\varepsilon_B}$$

Hint:

Den enkleste måten å utlede ligningene ovenfor er å beregne den tilsynelatende effektive dielektrisitetskonstant når det sammensatte materialet er plassert i det konstante feltet mellom to kondensatorplater slik som vist i figur 3. Det er ikke nødvendig å anta et stort antall lag, det er tilstrekkelig å betrakte to lag.




Figur 3

c) Anta at supergitteret består av metalliske lag A med en Drude-lik $\varepsilon_A = 1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}$ og isolerende lag B med $\varepsilon_B > 0$. Anta at $d_B = 2 \cdot d_A$. Vis at $\varepsilon_{||}$ er Drude lik med $\omega_p{}^{eff} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+2\varepsilon_B}}$.

Vis også at $\varepsilon_\perp$ oppfører seg som en dielektrisk isolator og finn $\varepsilon(\infty)$, $\omega_L$ and $\omega_T$. Anta igjen $d_B = 2 \cdot d_A$. Skisser frekvensavhengigheten av $\varepsilon_\perp$.

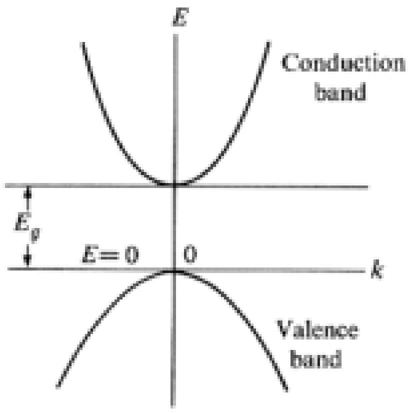
**<u>Oppgave 3</u>**

Kvantemekanisk er imaginærdelen av dielektrisitetskonstanten, $\varepsilon_2(\omega)$, gitt av

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi e^2}{m^2 \varepsilon_o \omega^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |M|^2 \, \delta\,(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

der $E_f$ er en energien i slutt-tilstanden og $E_i$ er energien i begynnelses-tilstanden for en optisk overgang $i \rightarrow f$.

a)




Figur 4

Anta at vi har en halvleder med et direkte gap $E_c = 2\Delta$ slik som vist på figur 4. Valensbåndet har en parabolsk E(k) med en hull-masse $m_h$ . Ledningsbåndet er også av parabolsk form med masse $m_c$. Anta at matriseelementet M for en optisk overgang nær k=0 er konstant. Vis at "joint density of states" for systemet er $\sim \sqrt{\hbar\omega - E_C}$ og at $\varepsilon_2$ dermed er av formen

$$\varepsilon_2 \sim \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\hbar\omega - E_C} \qquad for\ \ \hbar\omega > E_C$$

$$\varepsilon_2 = 0 \qquad\qquad for\ \ \hbar\omega < E_C$$

b) Anta så at overgangen ved k=0 er en såkalt forbudt overgang slik at matriseelementet er null for k=0. I et slikt tilfelle kan vi rekkeutvikle matriseelementet og skrive $|M|^2 = |M(0)|^2 + \alpha k^2 = \alpha k^2$. Vis at $\varepsilon_2$ i dette tilfelle blir av formen

$$\varepsilon_2 \sim \frac{1}{\omega^2}(\hbar\omega - E_C)^{3/2} \qquad for\ \ \hbar\omega > E_C$$

$$\varepsilon_2 = 0 \qquad\qquad for\ \ \hbar\omega < E_C$$

c) Beregn exciton bindingsenergien i GaAs der $\varepsilon = 13.1, \quad m_e^* = 0.067\ m_e \ \ og \ \ m_n = 0.53\ m_e$

Oppgitt: Energinivåene i hydrogenatomet er gitt av

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_o^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -\frac{R_o}{n^2}$$

med $R_o = 13.6$ eV og $\mu$ er den reduserte masse.

Hint: Potensialet rundt en ladning Q plassert i et materiale med diektrisitetskonstant $\varepsilon$ er

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon r}$$

**Oppgave 4**

a) Vi skal i denne oppgaven beregne den såkalte orienterings-polariserbarheten. Anta at vi har et system der permanente elektriske dipoler kan rotere fritt slik som i en gass eller væske. Systemet plasseres i et homogent elektrisk felt med retning langs x-aksen. Den potensielle energi til en dipol i et elektrisk felt er

$$V = -\,\overline{p}\cdot\overline{E} = -\,pE\cos\theta$$

Her er θ vinkelen mellom dipolens retning og x-aksen. Sannsynligheten for å finne en dipol orientert i retning θ er gitt av Boltzmann-faktoren $e^{-pE\cos\theta/kT}$. Bruk dette til å vise at middelverdien av $p_x$, x-komponenten av dipolmomentet, er gitt av den såkalte Langevin funksjonen

$$< p_x > = p\cdot L(n) = p\left(Cotgh(u) - \frac{1}{u}\right)$$

der $u = \dfrac{pE}{kT}$.

b) I de fleste tilfeller er pE/kT << 1. Vis at i dette tilfelle gjelder at

$$< p_x > = \frac{p^2}{3kT}E = \alpha_d E$$

Bruk Clausius Mosottis ligning til å beregne dielektrisitetskonstanten til et system med elektronisk polariserbarhet $\alpha_{el}$, jonisk polariserbarhet $\alpha_j$ og dipolar polariserbarhet gitt av ligningen ovenfor. Anta N dipoler per volumenhet.