Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Ola Hunderi
Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG 74435 - FASTE STOFFERS FYSIKK 2

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Fredag 16. januar 1998

Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling
S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

Når antakelsen om sterkt bundne elektroner benyttes, finner en at energien for et elektron i et periodisk gitter er gitt som

$$\varepsilon = \varepsilon_a - \gamma_o - \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n} \gamma_n$$

hvor

$$\gamma_n = -\int \phi_a^*(\vec{r} + \vec{\rho}_n) V'(\vec{r}) \phi_a(\vec{r}) d^3r$$

$$H_o \phi_a = \varepsilon_a \phi_a$$

$$V' = V_{gitter} - V_{atom} < 0$$

a) Finn dispersjonsrelasjonen $\varepsilon(k)$ for et kubisk gitter. Summer bare opp til og med nærmeste naboer.

b) Finn $\varepsilon(k)$ nær toppen og bunnen av energibåndet. Skisser hvordan flatene for konstante energiverdier ser ut i 1. Brillouinsone.

Finn den effektive masse m^* nær toppen og bunnen av energibåndet. Er negative effektive masser fysisk meningsfylt? Gi en kort forklaring.

c) Anta så at vi har et kubisk todimensjonalt materiale med et krystall-potensial gitt som

$$V(x,y) = -4U\cos(2\pi x/a)\cdot\cos(2\pi y/a)$$

Skisser de laveste energibåndene i "empty lattice" tilnærmelsen langs retningene [1,0] og [1,1]. Beregn så oppsplittingen av energinivåene i punktet $(\pi/a, \pi/a)$ i Brillouin-sonen. Vis at det er tilstrekkelig å benytte en 2x2 determinant.

Oppgave 2

a) Beregn tilstandstettheten i et system av Fermioner (elektroner), der energien er gitt av:

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{k_x^2}{m_{11}} + \frac{k_y^2}{m_{22}} + \frac{k_z^2}{m_{33}}\right]$$

b) Betrakt en energiflate som har form av rotasjons-ellipsoide

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{k_x^2 + k_y^2}{m_t} + \frac{k_z^2}{m_l}\right]$$

Beregn syklotronfrekvensen ω_c for det tilfelle at magnetfeltet har retning langs z-aksen og utled fra dette syklotronmassen m_c.

c) Gjenta beregningen for det tilfelle at magnetfeltet danner vinkelen θ med z-aksen. Vis at resultatet kan skrives på formen

$$\omega_c = eB\left[\frac{\cos^2\theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2\theta}{m_t m_l}\right]^{1/2}$$

Oppgitt: $\omega_c = \frac{2\pi eB}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{(\partial A_k/\partial E)}$

Oppgave 3

a) Vis at longitudinale plasmaoscillasjoner i et uendelig system, bare kan eksistere dersom $\varepsilon(k,\omega) = 0$.

b) Vi skal nå se på betingelsen for at såkalte overflateplasmoner kan eksistere. Betrakt et halvuendelig plasma av fri elektroner i området $z > 0$. En løsning av Laplaces ligning $\nabla^2\phi = 0$ i plasmaet er

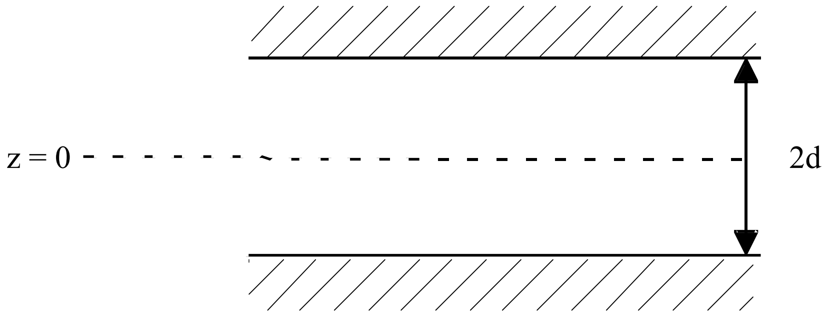
$$\phi = A\cos kx e^{-kz}$$

Vis at den tilsvarende løsning av Laplaces ligning i vakuum ($z < 0$) er gitt av $\phi_0 = A\cos kx e^{kz}$ og at denne tilfredsstiller betingelsen at $E_{||}$ skal være kontinuerlig på grenseflata. Vis videre at betingelsen om at $D_\perp$ skal være kontinuerlig på grenseflata bare er oppfylt dersom $\varepsilon(k,\omega) = -1$. Vis tilslutt at frekvensen for overflateplasmonene ω_s for en fri elektron gass er da gitt av

$$\omega_s^2 = \frac{1}{2}\omega_p^2$$

der ω_p er bulk plasma frekvensen.

c) Vi skal så se på de såkalte gap plasmonene. Betrakt to halv-uendelige media med overflater på $z = \pm d$ (se figur 1). Dielektrisitetsfunksjonen for de to mediene er $\varepsilon(\omega)$.



Figur 1

Vi skal vise at overflateplasmoner som er symmetriske om $z = 0$ kan eksistere i gapet dersom

$$\varepsilon(\omega) = -\tanh Kd, \text{ der } K^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad (1)$$

Vis først at løsningen av Laplaces ligning i gapet vil være av formen

$$\phi = f(z)\exp(ik_x x + ik_y y)$$

og finn $f(z)$. Løsningene i metallet vil være av formen

$$\phi = A\cdot\exp(\pm kz)\cdot\exp(ik_x x + ik_y y)$$

Her er A en konstant. + tegnet gjelder for $z \leq -d$ og − tegnet gjelder for $z \geq d$. Bruk grensebetingelsene fra Maxwells ligninger til å vise at overflateplasmonene bare kan eksistere i gapet dersom betingelsen (1) er oppfylt.

Oppgave 4

a) Man kan vise at transmisjonskoeffisienten for lys gjennom en tynn metallfilm med tykkelse $d \ll \lambda$, der λ er bølgelengden til lyset, er gitt av følgende formel

$$T(\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{dz\sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{dz\sigma_2}{2}\right)^2}$$

Her er z en konstant lik 376,6 Ω. σ_1 er realdelen og σ_2 er imaginærdelen av konduktiviteten. Anta at realdelen av konduktiviteten for en superleder er gitt av

$$\sigma_1(\omega) = \Omega_p^2 \delta(\omega)$$

idet Cooper-parene fører til en δ-funksjon i σ_1 for $\omega = 0$. Beregn $\sigma_2(\omega)$ ved hjelp av Kramers-Kronig-relasjonene og vis at dette fører til en transmisjon for $\omega \neq 0$ gitt av

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d \cdot z \cdot \Omega_p^2}{2\pi\omega}\right)^2}$$

Oppgitt: Kramers-Kronig relasjonene er:

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''(s)}{s - \omega} ds$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'(s)}{s - \omega} ds$$

b) Ligningen for inntrengning av et magnetfelt B i en superleder er gitt av differensialligningen

$$B = \lambda^2 \nabla^2 B$$

hvor λ er inntrengningsdybden. Vis at B(x) inne i en superledende plate perpendikulær til x-aksen og av tykkelse δ er gitt ved

$$B = B_a \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(\delta/2\lambda)}$$

hvor B_a er feltet utenfor platen og parallell til den. $x = 0$ er i midten av platen.

c) Vis at den effektive magnetisering $M(x)$ i platen definert som

$$\mu_o M(x) = B(x) - B_a$$

er gitt ved

$$\mu_o M(x) = -B_a \frac{1}{8\lambda^2}(\delta^2 - 4x^2)$$

når $\delta/\lambda << 1$.