Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Ola Hunderi
Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG 74435 - FASTE STOFFERS FYSIKK 2
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk
Fredag 18. desember 1998
Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling
S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae
O. Øgrim og B.E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Oppgave 1

a) Energien i nærheten av sentrum av Brillouinsonen kan i en del tilfelle beskrives av følgende formel:

$$E(k)\big(1+\alpha E(k)\big) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Her er α en konstant; den er i de fleste tilfeller liten.
Beregn tilstandstettheten D(E) for:

i) et endimensjonalt materiale av denne typen
ii) et tilsvarende todimensjonalt materiale

b) Hva skjer med D(E) for store verdier av E i disse tilfellene? Beregn også gruppehastigheten i de to tilfellene.

c) Vi skal så se på tilstandstettheten i en tilnærmet fri elektrongass i to dimensjoner. Anta at gitteret er kubisk med gitterkonstant a og at potensialet er så svakt at elektronene tilnærmet kan betraktes som en fri elektrongass.

i) I hvilket punkt i første BZ har elektronet høyest energi og hva er energien E_{max} i dette punktet?

ii) Beregn så tilstandstettheten D(E) i <u>første Brillouinsone</u>

Hint: Tenk deg at du starter å fylle tilstander i sentrum av Brillouinsonen og fyll så tilstander inntil hele første Brillouinsonen er fylt.

<u>Oppgave 2</u>

Når antakelsen om sterkt bundne elektroner benyttes, finner en at energien for et elektron i et periodisk gitter er gitt som

$$\varepsilon = \varepsilon_a - \gamma_o - \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n}\gamma_n$$

hvor

$$\gamma_n = -\int \phi_a^*(\vec{r} + \vec{\rho}_n)V'(\vec{r})\phi_a(\vec{r})d^3r$$

$$H_o\phi_a = \varepsilon_a\phi_a$$

$$V' = V_{gitter} - V_{atom} < 0$$

a) Finn dispersjonsrelasjonen $\varepsilon(k)$ for et kubisk gitter i tre dimensjoner. Ta med nærmeste og nest nærmeste nabo i summen.

b) Gjenta beregningen for et todimensjonalt heksagonalt gitter der avstanden til nærmeste nabo er a. Her summerer du bare opp til nærmeste nabo.

<u>Oppgave 3</u>

a) Vis at syklotron-banen til et elektron i det reelle rom i et magnetfelt $\vec{B}$ er slik at projeksjonen av banen i et plan $\perp \vec{B}$ er likeformet med banen i k-rommet, men rotert 90 ^{o} og skalert med en faktor. Hva er skaleringsfaktoren?

b) Schrødinger-ligningen for et fritt elektron i et konstant magnetfelt B langs z-aksen er gitt av:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieBx}{\hbar}\right)^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] = E\psi$$

Vis at denne ligningen har en løsning av formen $\psi(x,y,z) = f(x)e^{i(k_y y + k_z z)}$ og der funksjonen f(x) tilfredsstiller ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{e^2B^2}{2m}\left(x + \frac{\hbar\lambda}{eB}\right)^2 f(x) = E_0 f(x)$$

Dette er ligninger for en harmonisk oscillator med sentrum i $x_0 = -\frac{\hbar\lambda}{eB}$. Finn på denne måten energi-nivåene E.

c) Bruk dette til å finne arealet i k-rommet innenfor syklotronbanen i et magnetfelt $\vec{B}$.

Oppgave 4

Vi skal se på de såkalte grenseflate plasmonene på grensa mellom to metaller. Metall 1 ($z > 0$) har en bulk plasmafrekvens lik ω_{p1} og metall 2 ($z < 0$) har en bulk plasmafrekvens lik ω_{p2}. En løsning av Laplace ligning i medium 1 er $\phi(x,z) = A\cos kx e^{-kz}$ for $z > 0$ og $\phi(x,z) = A\cos kx e^{+kz}$ for $z < 0$. E-feltet i de to områdene er gitt av $\vec{E} = -\nabla\phi$.

a) Vis at potensialene ovenfor tilfredsstiller grensebetingelsen at den tangentiale komponenten av $\vec{E}$ er kontinuerlig over grenseflata. Vis at betingelsen at normalkomponenten av $\vec{D}$ skal være kontinuerlig fører til betingelsen $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ der ε_1 er dielektrisitetskonstanten i medium 1 og ε_2 den tilsvarende i medium 2

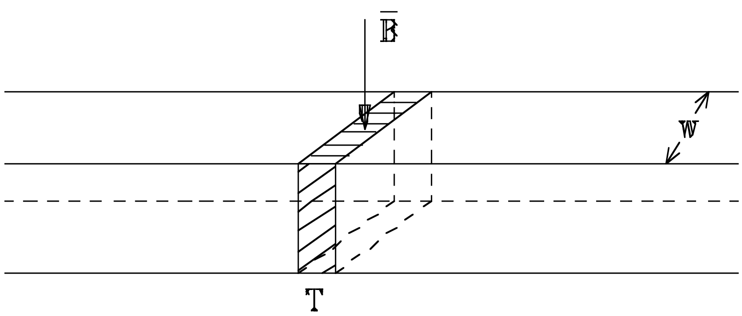
b) Vis videre at dette fører til at grenseflate-plasmonene har frekvensen

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\left(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2\right)\right]^{1/2}$$

Begge dielektrisitetskonstanter antas å være gitt av Drude-uttrykket.

Oppgave 5

Betrakt en Josephson-kontakt med rektangulært tverrsnitt og med et magnetfelt B som ligger i samme plan som kontakten, vinkelrett på kanten med bredde w slik som vist på figur 1.

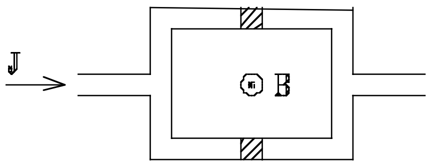


Figur 1

Vis at strømmen for B ≠ er gitt av

$$J = J_o \frac{\sin wTBe/\hbar c}{wTBe/\hbar c}$$

Hint: To utgangspunkt i uttrykket for den makroskopiske kvante-interferens i en krets med to Josephson-kontakter.



Figur 2

Her er strømmen gitt som $J = 2J_o \cos \frac{e\phi}{\hbar c}$. Her er for enkelhets skyld antattat faseforskjellen mellom de to superlederne er $\pi/2$ når $B = 0$. Del kontakten i figur 1 en opp i mange sløyfer, slik som i figur 2, og summer.