Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Ola Hunderi
Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG SIF4062 – FASTSTOFFYSIKK VK
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk
Tirsdag 8. mai 2001
Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling
S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Sensur faller 29. mai 2001

Løs oppgave 1, 2 og enten 3 eller 4.

Oppgave 1

a) Betrakt først et todimensjonalt, kvadratisk gitter. Vi ser først bort fra potensialet (empty lattice). Energien til et elektron i ett av hjørnene i Brillouinzonen er en faktor X større energien midt på zonekanten. Beregn X.

b) Potensialet til dette materialet er gitt av

$$V(x,y) = -2V_0(\cos\frac{2\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi y}{a})$$

der V_0 er en konstant og a er gitterkonstanten. Finn energigapet midt på zonekanten og plot hvordan energibåndene varierer langs zonekanten.

c) Anta at materialet er divalent og finn betingelsen for at systemet skal være metallisk.

d) Na metall har bcc struktur og ett valens elektron pr. atom slik at første Brillouinzone ikke er fylt. Avstanten fra sentrum av Brillouinzonen til nærmeste punkt på kanten av zonen er $\sqrt{2}\cdot\pi/a$, der a er giterkonstanten; a = 0.423 nm. Finn en formel som estimerer grensebølgelengden for "onset" av interbandovergangen fra det laveste band til det nest laveste band. Anta at k_F ligger så langt fra zonegrensen at vi kan se bort fra krystallpotensialet og bruke "empty lattice" tilnærmelsen. Gi en kort begrunnelse for at "empty lattice" er en god tilnærmelse her.

Oppgave 2

a) Vi skal se på et paramagnetisk system med bare to tilstander $J = S = \pm 1/2$. Vis at Brillouinfunksjonen i dette tilfellet tar formen

$$B_s(x) = \tanh(x)$$

med $x = \dfrac{g\mu_B S \cdot B}{k_B T} = \dfrac{\mu_B \cdot B}{k_B T}$ for $g = 2$, $S = \dfrac{1}{2}$.

Utled Curie's lov for temperaturavhengigheten av susceptibiliteten.

b) Vi skal så se på det tilsvarende ferromagnetiske tilfelle; $J = S = \pm 1/2$, $g = 2$. Gjør rede for Weiss hypotese og vis at magnetiseringen er gitt av

$$M = n\mu_B \tanh\left(\mu_B \mu_o \lambda M / k_B T\right)$$

Forklar hvorfor spontan magnetisering bare er mulig under en kritisk temperatur T_c. Vis at den kritiske temperaturen er gitt av

$$T_c = \frac{n\mu_B^2 \mu_o \lambda}{k_B}$$

c) Vis at magnetiseringen ved svært lave temperaturer er gitt av uttrykket

$$M = n\mu_B \left(1 - 2e^{-2T_c/T}\right)$$

Vis videre at magnetiseringen M like under T_c der M er liten er slik at $\tanh(x)$ kan rekkeutvikles, er gitt av

$$M = \sqrt{3}\, n\mu_B \frac{T}{T_c}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$$

d) Betrakt til slutt området like over T_c. I dette tilfellet er

$$M = n\mu_B \tanh\left(\mu_B (B + \mu_o \lambda M)/k_B T\right)$$

i det paramagnetiske omrde. Betrakt både B og M som små og utled derav Curie-Weiss lov for susceptibiliteten.

Oppgave 3

a) Sett opp bevegelsesligningen for elektronene i en fri elektron gass i et ytre statisk elektrisk felt. Anta at levetiden (tiden mellom to støt) er τ. Løs ligningen og beregn den statiske elektriske ledningsevne σ_o til en slik elektrongass. Vis at den tilsvarende AC ledningsevne er gitt av

$$\sigma = \frac{\sigma_o}{1 - i\omega\tau}$$

der ω er frekvensen til et elektriske feltet.

b) Modellene ovenfor tar ikke hensyn til bandstruktur. I forelesningene har vi vist at den elektriske ledningsevnen i et reelt system er gitt av et integral

$$\sigma_{ii} = \frac{e^2}{4\pi^3} \int d\bar{k}\; v_i^2(k)\, \tau(k)\, \delta\,(E(k) - E_F)$$

$$i = (x, y, z)$$

Vis ut fra ligningen ovenfor at ledningsevnen til et materiale med kubisk symmetri er gitt av

$$\sigma = \frac{e^2}{12\pi^3\hbar} \tau(k_F) < v > \cdot S$$

der S er arealet av Fermiflata. Hva er $<v>$ i dette uttrykket? Kommenter kort hvordan σ avhenger av båndfyllingen; i.e. hvor stor del av et bånd som er fylt. Forklar hvorfor en situasjon der Fermiflata er så stor at den nesten berører zonekanten likevel resulterer i relativt lav σ.

c) Anta nå at energien er gitt av

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m_\perp}(k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2}{2m_\parallel} k_z^2$$

Beregn σ_{xx} for dette materialet. Sammenlign beregningen med resultatet i a). Anta at Fermiflaten i sin helhet ligger innenfor første Brillouinzone.

d) Gjenta beregningen for σ_{zz}.

Oppgave 4

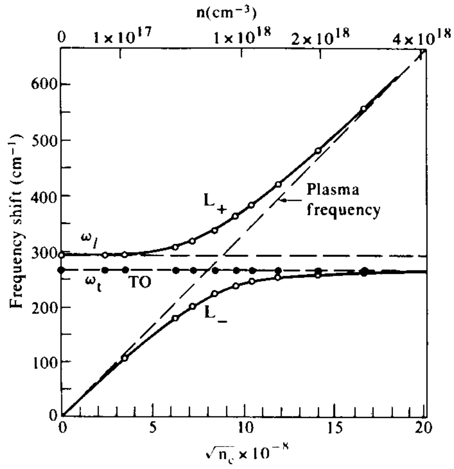
Anta at vi har et materiale (alkali halid) med $\varepsilon(0) = 5.9$, $\varepsilon(\infty) = 2.25$ og der reflektansen $R = 0$ ved $\lambda = 3.07\ \mu m$. Anta videre at dempningen i materialet er neglisjerbar.

a) Finn ω_L og ω_T.

b) Vi skal i denne delen av oppgaven se på kobling mellom plasmoner og optiske fononer. Figuren viser resultater fra eksperimenter der plasmafrekvensen i GaAs ble variert ved å bruke prøver med ulik doping. På denne måten ble plasmafrekvensen variert fra under til over TO-fonon frekvensen. Vis at dielektrisitetskonstanten i dette tilfelle er gitt av

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\infty) + \frac{(\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty))\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

c) Ta utgangspunkt i Maxwells ligninger og vis at betingelsen for at longitudinale bølger kan eksistere i systemet er at $\varepsilon(\omega) = 0$. Vis at de longitudinale modene kvalitativt varierer med ladningstettheten som angitt på figuren.



Figur.

d) Anta at vi har et materiale der dielektrisitetskonstanten har flere poler, slik at $\varepsilon(\omega)$ er gitt av

$$\varepsilon(\omega) = A + \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{\omega^2 - \omega_{T,i}^2}$$

Vis at dette fører til en generalisert Lyddane-Sachs-Teller relasjon av formen

$$\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\omega_{L,i}}{\omega_{T,i}} \right)^2$$

der $\omega_{L,i}$ er frekvensene der $\varepsilon(\omega) = 0$.

Hint: Skriv $\varepsilon(\omega) = 0$ som et n-te grads polynom i ω^2 og gjør bruk av at produktet av alle røttene i polynomet er gitt av konstantleddet.