Løsningsforslag, eksamen 16. januar 1998

Oppgave 1

a) Energien er gitt av

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 - \alpha - \sum_n e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}_n} \cdot \gamma_n$$

γ_n er den samme for alle de nærmeste naboene; γ

$\Rightarrow$
$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 - \alpha - \gamma \sum_{\text{naboer}} e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n}$$

Posisjonene til de nærmeste naboene i et kubisk gitter er $(\pm a, 0, 0)$; $(0, \pm a, 0)$ og $(0, 0, \pm a)$.
Setter vi dette inn fås:

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right)$$

FIGUR!!!

b) Bunnen av energibåndet finner vi for små verdie av k_x , k_y , k_z .
Dersom vi rekkeutvikler cos-funksjonene for små verdier fås $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(3 - \tfrac{1}{2}a^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\right)$$
$$= \varepsilon_0 - \alpha - 6\gamma + \gamma a^2 k^2$$

Toppen a båndet finner vi i hjørnet av BZ $k = (\pi/a, \pi/a, \pi/a)$
Sett $k_x = \pi/a - \delta k_x$ osv.

$\Rightarrow$
$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(-3 + \tfrac{1}{2}a^2\left(\delta k_x^2 + \delta k_y^2 + \delta k_z^2\right)\right)$$
$$= \varepsilon_0 - \alpha + 6\gamma - \gamma a \delta^2 k^2$$

Fra dette ser vi med en gang at den effektive masse nær bunnen er

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\gamma a^2}$$

og nær toppen

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{2\gamma a^2}$$

c) FIGUR!!!

Kubisk struktur: Laveste basis-vektorer i 2 dim: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) ...
Energier gitt av $E(k) = \dfrac{\hbar^2}{2m}(k - G)^2$
I punkt (1) er (0,0) og (1,0) degenererte.
I punkt (2) er (0,0) og (1,1) degenererte.

FIGUR!!!

Potensialet er

$$V(x, y) = -4U \cos 2\pi x/a \cdot \cos 2\pi y/a$$
$$= -U\left(e^{2\pi i x/a + 2\pi i y/a} + \cdots + e^{-2\pi i x/a - 2\pi i y/a}\right)$$

$$= -U\big((1,1) + (1,-1) + (-1,1) + (-1,-1)\big)$$

I punktet $(\pi/a, \pi/a)$ er (0,0), (1,1) og (1,0), (0,1) degenererte.
Dette gir sentralligningen

	0 0	1 1	1 0	0 1
0 0	$E_{00}-\lambda$	U_{11}	0	0
1 1	U_{11}	$E_{11}-\lambda$	0	0
1 0	0	0	$E_{10}-\lambda$	U_{11}
0 1	0	0	U_{11}	$E_{01}-\lambda$

NB! $U_{10} = 0$, $U_{11} = -U$

Dette reduseres til to 2x2 determinanter.
$E_{00} = E_{11} = E_{01} = E_{10}$ i punktet $(\pi/a,\pi/a)$

$$E_{00} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$\begin{vmatrix} E_{00} - \lambda & -U \\ -U & E_{00} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(E_{00} - \lambda)^2 - U^2 = 0 \qquad\qquad \lambda = E_{00} \pm U$$

Oppgave 2

a) FIGUR!!!

Lignigen for ellipsoiden skrives på formen

$$\frac{k_x^2}{m_{11} 2E/\hbar^2} + \frac{k_y^2}{m_{22} 2E/\hbar^2} + \frac{k_z^2}{m_{33} 2E/\hbar^2} = 1$$

Volumet av energi-ellipsoiden er da gitt som

$$V_k = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2E}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{m_{11} m_{22} m_{33}}$$

Antall tilstander er da

$$N_k = 2 \cdot \frac{1}{\frac{(2\pi)^3}{V}} V_k = \frac{2V}{8\pi^3} \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2E}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{m_{11} m_{22} m_{33}}$$

$$D(E) = \frac{\partial N}{\partial E} = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$$

med $m^* = (m_{11} m_{22} m_{33})^{1/3}$

b) FIGUR!!!

Vi har vist i forelesningene at syklotron-massen er gitt av uttrykket

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \Big/ \left(\partial A \big/ \partial \varepsilon \right)$$

Syklotronfrekvensen bestemmes av de ekstreme orbitalene. Her er da

$$A_k^{ext} = \pi \sqrt{\frac{2m_t E}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2m_t E}{h^2}} = \frac{2\pi m_t E}{h^2}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \frac{1}{\frac{\partial A_k}{\partial E}} = \frac{2\pi eB}{h^2} \frac{h^2}{2\pi m_t} = \frac{eB}{m_t}$$

c) Arealet i k-rommet

$$A_k = \sqrt{\frac{2Em_t}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{h^2}} \cdot \frac{\pi}{\left[\frac{\cos^2\theta}{m_t} + \frac{\sin^2\theta}{m_l} \right]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial E} = \frac{2}{h^2} \frac{\pi}{\left[\frac{\cos^2\theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2\theta}{m_t m_l} \right]^{1/2}}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \cdot \frac{1}{\frac{\partial A_k}{\partial E}} = eB \left[\frac{\cos^2\theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2\theta}{m_t m_l} \right]^{1/2}$$

Oppgave 3

a) Fra Maxwells ligninger har vi

$$\nabla \vec{D} = 0$$

$$\nabla \vec{E} = \rho_{ind} / \varepsilon_0$$

For Fourierkomponentene fås da med *D* = ε·*E*

$$i\vec{k}\vec{E}\varepsilon(k,\omega) = 0$$

$$i\vec{k}\vec{E} = \rho_{ind}(k,\omega)/\varepsilon_0$$

Disse to ligningene forteller oss at den eneste mulighet for en løsning der $E \neq 0$ er dersom ε(k,ω) = 0.

b) Fra potensialet $\phi = A\cos kx \cdot e^{-kz}$ fås et felt i metallet:

$$E_x^m = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = kA \sin kx \cdot e^{-kz}$$

$$E_z^m = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = kA \cos kx \cdot e^{-kz}$$

og i vakuum fås

$$E_x^0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = kA \sin kx \cdot e^{kz}$$

$$E_z^0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z} = -kA \cos kx \cdot e^{kz}$$

kontinuitetsbet. for $z = 0$

$E_{||}$ kontinuerlig: $E_x^{v} = E_x^{m}$

$\Rightarrow kA \sin kx = kA \sin x$ OK

D_n kontinuerlig. $D = \varepsilon E$

$$\Rightarrow \varepsilon kA\cos kx = -kA\cos kx$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = -1}}$$

For fri elektroner har vi $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$\Rightarrow \varepsilon = -1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{\omega_p^2}{2}$$

c) Løsning i gapet:

$$\phi = f(z)e^{i(k_x x + k_y y)}$$

Innsatt i LaPlace $\nabla^2\phi = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(k_x^2 + k_y^2\right)f = 0$$

Denne ligning har løsning

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \qquad \text{med} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Vi skal bruke den symmetriske løsningen der $A = B$.

$$f(z) = A\left(e^{kz} + e^{-kz}\right)$$

I metallet må løsningen være av formen

$$\phi = C \cdot e^{-kz} e^{ik_x x + ik_y y} \qquad \text{for } z \geq d$$

og

$$\phi = C \cdot e^{kz} e^{ik_x x + ik_y y} \qquad \text{for } z \leq d$$

Grensebet. for $z = +d$

E_{tang} kontinuerlig $\Rightarrow$

$$A\left(e^{+kd} + e^{-kd}\right) = C \cdot e^{-kd}$$

D_n kontinuerlig $\Rightarrow$ med $D = \varepsilon E$

$$kA\left(e^{kd} - e^{-kd}\right) = -\varepsilon C e^{-kd}$$

Dividerer disse to ligningene med hverandre

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{e^{kd} - e^{-kd}}{e^{kd} + e^{-kd}}$$
$$\underline{\varepsilon = -\tanh kd}$$

Oppgave 4

a) Kramers-Kronig relasjonene for en kompleks responsfunksjon $\alpha(\omega) = \alpha_1 + i\alpha_2$ lyder:

$$\alpha_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P\int_0^\infty \frac{\alpha_1(s)}{s^2 - \omega^2} ds$$

Her $\alpha \to \sigma$ med $\sigma_1 = \Omega_P^2 \delta(\omega)$

$\Rightarrow$

$$\sigma_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P\int_0^\infty \frac{\Omega_P^2 \delta(s)}{s^2 - \omega^2} ds$$
$$= \frac{2}{\pi\omega}\Omega_P^2$$

Setter vi dette inn i den oppgitte formelen fås:

$$T(\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{d \cdot z \cdot \Omega_P^2 \delta(\omega)}{2}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot z \cdot \Omega_P^2}{\pi\omega}\right)^2}$$

For $\omega \neq 0$ er $\delta(\omega) = 0$

$$\Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d \cdot z \cdot \Omega_P^2}{\pi\omega}\right)^2}$$

b) Fra London-ligningen $\nabla^2 B = B/\lambda_L^2$ har vi løsninger av formen $B \sim e^{\pm x/\lambda_L}$ på begge sider av plata.

FIGUR!!!

Dermed blir feltet $B(x) = K\left(e^{x/\lambda_L} + e^{x/\lambda_L}\right)$.

Konstanten er bestemt av at feltet på overflaten skal være B_a.

$$\Rightarrow B(x) = B_a \frac{e^{x/\lambda_L} + e^{x/\lambda_L}}{e^{\delta/2\lambda_L} + e^{-\delta/2\lambda_L}} = B_a \frac{\cosh x/\lambda_L}{\cosh \delta/2\lambda_L}$$

c) For $\delta << \lambda_L$ kan vi rekkeutvikle eksponentialfunksjonen. Dette gir

$$B(x) \approx B_a \frac{1 + x^2/2\lambda_L^2}{1 + \delta^2/8\lambda_L^2} \approx B_a\left(1 + \frac{x^2}{2\lambda_L^2} - \frac{\delta^2}{8\lambda_L^2}\right)$$

$$B(x) - B_a = \mu_0 M(x) = -\frac{B_a}{8\lambda_L^2}\left(\delta^2 - 4x^2\right)$$