Løsningsforslag, eksamen 18. desember 1998

Oppgave 1

a) I det generelle tilfelle kan man ta utgangspunkt i uttrykket

$$D_n(E) = \frac{2}{(2\pi)^n}\int d^n k\,\delta\big(E - E(k)\big)$$

Men ut fra geometriske betraktninger av antall tilstander mellom E og $E + dE$ ser vi at

2 dim:

$$D(E) = \frac{2\pi k}{dE/dk}\cdot\frac{2}{(2\pi)^2}$$

Fra $E(k)\big(1+\alpha E(k)\big) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ får vi

$$\frac{dE}{dk}\big(1+2\alpha E(k)\big) = \frac{\hbar^2 k}{m}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{k}{dE/dk} = \frac{m}{\hbar^2}\big(1+2\alpha E(k)\big)$$

$$\Rightarrow \qquad D(E) = \frac{2\pi m}{\hbar^2}(1+2\alpha E)\cdot\frac{2}{4\pi^2}$$

$$= \frac{m}{\pi\hbar^2}(1+2\alpha E)$$

1 dim: (Tilstander ved $\pm k$; $E = \dfrac{\hbar^2(\pm k)^2}{2m}$ $\Rightarrow$ faktor 2)

$$D(E) = \frac{2}{2\pi}\frac{2}{dE/dk} = \frac{2m}{\hbar^2 k}(1+2\alpha E)\cdot\frac{2}{2\pi}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E(1+\alpha E) \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E(1+\alpha E)}$$

$$D(E) = \frac{1}{\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1+2\alpha E}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E(1+\alpha E)}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{1+2\alpha E}{\sqrt{E(1+\alpha E)}}$$

b) For store verdier av E får vi følgende grenser

2 dim $\qquad D(E) \to \dfrac{m}{\pi\hbar^2}\cdot 2\alpha E \qquad \sim E$

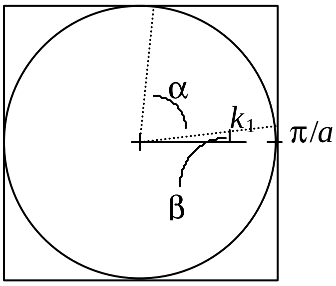
1 dim $\qquad D(E) \to \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}}\cdot 2\sqrt{\alpha} \qquad \sim$ konstant

Gruppehastigheten er gitt av $v_g = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial E}{\partial k}$

1 & 2 dim: $\quad v_g = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial E}{\partial k} = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\hbar^2}{m}\dfrac{k}{1+2\alpha E} = \dfrac{\hbar}{m}\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}}\dfrac{\sqrt{E(1+\alpha E)}}{1+2\alpha E}$

For store E går v_g mot en konstant $= \dfrac{1}{\sqrt{2m\alpha}}$

c)



Elektronene har høyest energi i hjørnene av BZ. Der er energien

$$E_{max} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right) = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Tilstandstettheten for små energier er som i en fri elektrongass $\underline{\underline{\frac{m}{\pi\hbar^2}}}$

For energier større enn energien på midten av en sidekant av BZ, f.eks. punktet $(\pi/a,0)$, vil vi få mindre faserom tilgjengelig, mindre antall tilstander innenfor et energi-intervall dE. Vi får skalert resultatet $\frac{m}{\pi\hbar^2}$ med vinkelen α.

$$\alpha = 90 - 2\beta, \qquad \cos\beta = \frac{\pi/a}{k_1} = \frac{\pi/a}{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

$$\sin\alpha = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2E(\pi/a)}{E} - 1$$

$$D(E) = \frac{m}{\hbar^2\pi}\frac{\alpha}{\pi/2} = \frac{m}{\pi\hbar^2}\frac{\arcsin\left(2\frac{E_{\pi/a}}{E} - 1\right)}{\pi/2}$$

Vi ser at $D(E) = 0$ for $2E_{\pi/a}$, dvs. i hjørnet av BZ.

Oppgave 2

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \gamma_0 - \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n}\gamma_n$$

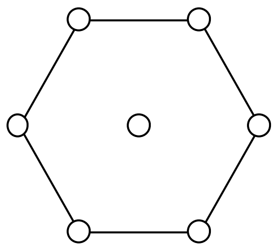
a) Her skal vi ta med både nærmeste og nest nærmeste nabo. Nærmeste naboer ligger i posisjonene $(\pm1,0,0)a$, $(0,\pm1,0)a$ og $(0,0,\pm1)a$.
Nest nærmeste naboer ligger i avstanden $a\sqrt{2}$ og har koordinater $(\pm1,\pm1,0)a$, $(\pm1,0,\pm1)a$ og $(0,\pm1,\pm1)a$. Dette gir:

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \gamma_0 - \left[e^{ik_xa} + e^{-ik_xa} + e^{ik_ya} + e^{-ik_ya} + e^{ik_za} + e^{-ik_za}\right]\gamma_1$$
$$- \left[e^{i(k_x\pm k_y)a} + e^{-i(k_x\pm k_y)a} + e^{i(k_x\pm k_z)a} + e^{-i(k_x\pm k_z)a} + e^{i(k_y\pm k_z)a} + e^{-i(k_y\pm k_z)a}\right]\gamma_2$$
$$= \varepsilon_a + \gamma_0 - 2\gamma_1\left[\cos k_xa + \cos k_ya + \cos k_za\right] - 2\gamma_2\left[\cos(k_x + k_y)a + \cos(k_x - k_y)a\right.$$
$$\left. + \cos(k_x + k_z)a + \cos(k_x - k_z)a + \cos(k_y + k_z)a + \cos(k_y - k_z)a\right]$$

Dette kan også skrives på formen

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \gamma_0 - 2\gamma_1\left[\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right]$$
$$- 4\gamma\left[\cos k_x a \cdot \cos k_y a + \cos k_x a \cdot \cos k_z a + \cos k_y a \cdot \cos k_z a\right]$$

b)



Koordinatene til de nærmeste naboene er

$(\pm 1{,}0)a$, $(\pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,)a$

Dette gir for energiene

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1\left[e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} + e^{i\left(\frac{k_x a}{2}+\frac{k_y\sqrt{3}a}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{k_x a}{2}+\frac{k_y\sqrt{3}a}{2}\right)}\right.$$
$$\left. + e^{i\left(\frac{k_x a}{2}-\frac{k_y\sqrt{3}a}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{k_x a}{2}-\frac{k_y\sqrt{3}a}{2}\right)}\right]$$
$$= \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1 \cdot 2\cos k_x a + \cos\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{k_y}{2}\sqrt{3}a\right) + \cos\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{k_y}{2}\sqrt{3}a\right)$$
$$= \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1 \cdot 2\left[\cos k_x a + \cos\frac{k_x a}{2}\cos\frac{k_y\sqrt{3}a}{2}\right]$$

Oppgave 3

a) Bevegelsesligningen i et plan $\perp$ $\overline{B}$ feltet er gitt av

$$m\dot{\vec{v}} = e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Videre er $m\overline{v} = \hbar\vec{k}$

$$\hbar\dot{\vec{k}} = e\left(\overline{v} \times \vec{B}\right)$$
$$\hbar\frac{d\overline{k}}{dt} = e\left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \vec{B}\right)$$

Denne integreres og gir

$$\hbar\overline{k}(t) = e\left(\overline{r}(t) \times \vec{B}\right)$$

Dette viser at bane i k-rommet er likeformet med banen i r-rommet og skalert med faktoren $\frac{eB}{\hbar}$.

b) Vi setter prøveløsningen inn i Schrødinger ligningen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieBx}{\hbar}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]e^{i(\lambda y + k_z z)} f(x) = Ee^{i(\lambda y + k_z z)} f(x)$$

Utfører vi derivasjon m.h.p. y og z får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(i\lambda+\frac{ieBx}{\hbar}\right)^2-k_z^2\right]f(x)=Ef(x)$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{e^2B^2}{2m}\left(x+\frac{\hbar\lambda}{eB}\right)^2 f(x)=\left(E-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\right)f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{e^2B^2}{2m}\left(x+\frac{\hbar\lambda}{eB}\right)^2 f(x)=E_0 f(x)$$

Dette siste er ligningen for en harmonisk oscillator $\Rightarrow\ E_0=\hbar\omega_0(n+1/2)$
og totalenergien er da gitt som

$$\underline{E=\hbar\omega_0(n+1/2)+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}}$$

$$\underline{\omega_0=\omega_c=\frac{eB}{m}}$$

c) Arealet i k-rommet er nå gitt av følgende: Vi ser bare på ekstremalbanene der $k_z = 0$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\hbar^2k^2}{2m}\equiv\hbar\omega_c(n+1/2)$$

$$S_n=\pi k^2=\pi\frac{2m\omega_c}{\hbar}(n+1/2)=\pi\frac{2m}{\hbar}\frac{eB}{m}(n+1/2)=\frac{2\pi eB}{\hbar}(n+1/2)$$

Oppgave 4

a) Fra $\overline{E}=-\nabla\phi$ får vi at $E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$

$$\Rightarrow \qquad E_{1x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(A\cos kx e^{-kz}\right)_{z=0}=A\sin kx$$

$$E_{2x}(z=0)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(A\cos kx e^{+kz}\right)_{z=0}=A\sin kx$$

$E_{1x}=E_{2x}$; $\qquad E_{\text{tang}}\equiv$ kontinuerlig.

$$D_n=E_z=\varepsilon E_z$$

$$\Rightarrow \qquad D_1(z=0)=-\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z)\Big|_{z=0}\varepsilon_1=\varepsilon_1 kA\cos kx$$

$$D_2(z=0)=-\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z)\Big|_{z=0}\varepsilon_2=-\varepsilon_2 kA\cos kx$$

Dermed gir kontinuitetstesten for D_n

$$\varepsilon_1=-\varepsilon_2$$

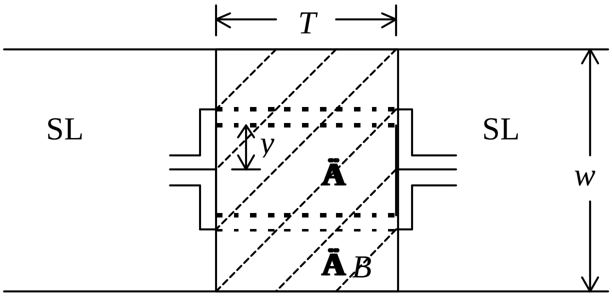
b) Med Drude fås:

$$1-\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2}=-\left(1-\frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2}\right)$$

$$2=\frac{\omega_{p1}^2+\omega_{p2}^2}{\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\left[\tfrac{1}{2}\left(\omega_{p1}^2+\omega_{p2}^2\right)\right]^{1/2}$$

Oppgave 5

Vi deler Josephson-kontakten inn i små sløyfer



Fluksen gjennom denne tenkte sløyfa er

$$\phi(y) = 2yTB$$

og strømmen er proporsjonal med dy.

$$\Rightarrow \qquad dJ = 2J_0 \cos\left(\frac{2eyTB}{\hbar c}\right) dy/w$$

Dette integreres fra $-w/2$ til $+w/2$

$$J = \frac{2J_0}{w} \int_0^{w/2} \cos\frac{2eyTB}{\hbar c} dy$$

$$= \frac{J_0}{\frac{eTBw}{\hbar c}} \left. \sin\frac{2eyTB}{\hbar c} \right|_0^{w/2}$$

$$\underline{= J_0 \frac{\sin ewTB/\hbar c}{ewTB/\hbar c}}$$