UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P.C. Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 74993 IKKELINEÆR DYNAMIKK

Lørdag 6. juni 1992

kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel formler er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

Gardner-likningen

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 12\delta u^2 u_x$$

er en dimensjonsløs ikke-lineær likning for bølgefunksjonen $u(x,t)$ med δ som parameter.

a) Vis at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx$$

er en bevart størrelse. Det forutsettes at integralet konvergerer, og at u og dens deriverte forsvinner for $x \to \pm\infty$.

b) Vis at eventuelle permanente bølger tilfredsstiller likningen

$$\tfrac{1}{2}u'^2 + V(u) = E,$$

der

$$V(u) = \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{2}c\,u^2 - \delta u^4 - Au,$$

c er hastigheten, og A og E er konstanter.

c) Anta først $\delta = 0$, og vis at solitær-bølger av pulsform med $u(x \to \pm\infty) = 0$ eksisterer. Hva er pulshøyden som funksjon av hastigheten? Hva er pulsens eksplisitte form?

d) Anta så $\delta > 0$. Vis kvalitativt at to typer solitære bølger kan opptre, i form av en puls eller i form av en forskyvning (også kalt tvinn/antitvinn, eller kink/antikink). Vil en permanent bølge av forskyvningsform kunne bevege seg i positiv x-retning, i negativ

x-retning, eller i begge retninger?

e) Anta tilslutt $\delta < 0$, og undersøk om det i dette tilfellet eksisterer solitære bølger av pulsform, og av forskyvningsform.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på Korteweg-de Vries-likningen i følgende dimensjonsløse form:

$$u_t - 6u\, u_x + u_{xxx} = 0.$$

Vi vil la $u(x,t)$ være potensial og λ egenverdi i den stasjonære Schrödingerlikning

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u\psi = \lambda\psi.$$

Tida t i KdV-likningen er en ren parameter i Schrödingerproblemet.

Spredningsdata for Schrödinger-likningen er eventuelle diskrete egenverdier $\lambda_n \equiv -\kappa_n^2$, amplitudekoeffisienter a_n for den asymptotiske form $a_n e^{-\kappa_n x}$ av energiegenfunksjonene, og refleksjonskoeffisienten $r(k)$ for en innfallende planbølge med bølgetall k. Det er oppgitt at hvis potensialet u tilfredsstiller KdV-likningen, så er egenverdi-spektret uavhengig av t, og de øvrige spredningsdataene har følgende parameter-avhengighet:

$$a_n(t) = a_n(0)e^{4\kappa_n^3 t}$$

$$r(k,t) = r(k,0)e^{8ik^3 t}.$$

a) Anta at startpotensialet $u(x,0)$ har bare en eneste bunden tilstand $\lambda = -\kappa^2$, og er refleksjonsløst, dvs $r(k,0) = 0$.

Bruk invers-sprednings-metoden til å bestemme $u(x,t)$ ved senere tidspunkt.

b) Potensialet

$$u(x,0) = -\frac{12\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)}$$

i Schrödinger-problemet er refleksjonsløst og har 3 diskrete egenverdier: $\lambda_1 = -9\alpha^2, \lambda_2 = -4\alpha^2$, og $\lambda_3 = -\alpha^2$. La denne $u(x,0)$ være startprofilet i KdV-likningen, og skissér uten regning hvorledes du venter $u(x,t)$ ser ut ved senere tidspunkt.

c) KdV-likningen kan bl.a. beskrive overflatebølger på vann. Under hvilke fysiske betingelser er dette en god beskrivelse? (Svar kort.)

Oppgave 3

Den ikke-lineære oscillatoren

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

er ekvivalent til følgende autonome dynamiske system:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -x - (x^2 + p^2 - 1)p \end{aligned}$$

a) Bestem systemets likevektspunkt(er), og klassifiser det(dem).

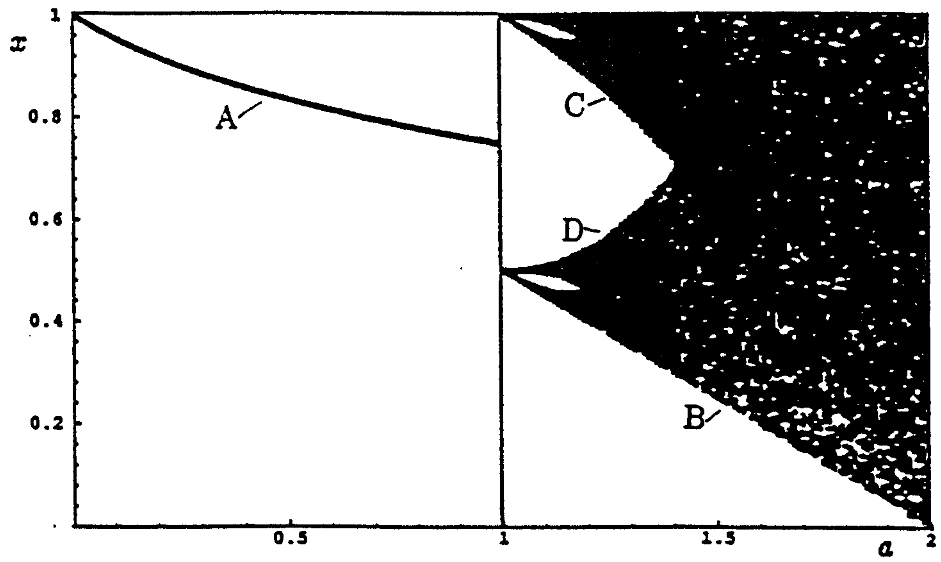
b) Systemet har én sirkulær grensesyklus i (x, p)-planet. Finn den, bestem dens stabilitet, og sammenlikn med resultatet fra punkt a).

Oppgave 4

Iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n - \tfrac{1}{2}|$$

er fundamentalt forskjellig fra den logistiske avbildning, bl.a. mangler periodedoblings-kaskaden. Figuren viser et grovt bilde av attraktoren som funksjon av kontrollparameteren a, for $a \in (0, 2)$. (En ser begynnelsen på en såkalt *invers* bifurkasjon-sekvens, idet det ses at når kontrollparameteren *avtar* øker antall kaotiske band fra ett til to til fire, mens den videre oppsplitting ikke kommer fram på denne figuren.)



a) Bestem linje A analytisk.

b) Bestem grenselinjen B analytisk.

c) Sett $a = \sqrt{2}$, og bestem hele banen når iterasjonen starter med maksimalverdien $x_0 = 1$.

d) Finn de analytiske uttrykk for grenselinjene C og D i figuren.

e) Hva venter du, ut fra figuren alene, vil skje med iterasjonens Lyapunov-eksponent λ når kontrollparameteren a går fra verdier mindre enn 1 til verdier større enn 1? Hva er $\lambda(a)$ for denne iterasjonen?

Vedlegg
(Noe av dette kan du få bruk for)

Konstruksjon av potensial fra spredningsdata:

- *Fra spredningsdataene κ_n, a_n og $r(k)$ dannes funksjonen*

$$B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r(k)e^{ikz}dk + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 e^{-\kappa_n z}.$$

- *Deretter løses den lineære integrallikning*

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^{\infty} K(x,z)B(y+z)dz = 0$$

mhp $K(x,y)$.

- *Da er potensialet gitt ved*

$$u(x) = -2K_x(x,x).$$

Integraler:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\tan(x/2)$$