UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P.C. Hemmer
Tlf. 3648

EKSAMEN I FAG 74993 IKKELINEÆR DYNAMIKK

Mandag 24. august 1992

kl.0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel formler er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

Schamel-likningen

$$16u_t + 30u_x\sqrt{u} + u_{xxx} = 0$$

for ione-akustiske bølger i et tokomponent-plasma er en dimensjonsløs ikke-lineær likning for den positive bølgefunksjonen $u(x,t)$.

a) Vis at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx$$

er en bevart størrelse. Det forutsettes at integralet konvergerer, og at u og dens deriverte forsvinner for $x \to \pm\infty$.

b) Vis at eventuelle permanente bølger tilfredsstiller likningen

$$\tfrac{1}{2}u'^2 + V(u) = E,$$

der

$$V(u) = 8u^{\frac{5}{2}} - 8cu^2 - Au,$$

c er hastigheten, og A og E er konstanter.

c) Argumentér for at solitær-bølger av pulsform med $u(x \to \pm\infty) = 0$ kan eksistere (for visse valg av konstanter). Eksisterer både høyreløpende og venstreløpende solitære bølger? Finn, uten å beregne pulsens eksplisitte form, pulshøyden som funksjon av hastigheten.

d) Finn så pulsens eksplisitte form. (Hjelp: Det er hensiktsmessig å innføre ny variabel y ved transformasjonen $u = c^2 y^{-4}$).

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på Korteweg-de Vries-likningen i følgende dimensjonsløse form:

$$u_t - 6u\, u_x + u_{xxx} = 0.$$

Vi vil la $u(x,t)$ være potensial og λ egenverdi i den stasjonære Schrödingerlikning

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u\psi = \lambda\psi.$$

Tida t i KdV-likningen er en ren parameter i Schrödingerproblemet.

Spredningsdata for Schrödinger-likningen er eventuelle diskrete egenverdier $\lambda_n \equiv -\kappa_n^2$, amplitudekoeffisienter a_n for den asymptotiske form $a_n e^{-\kappa_n x}$ av energiegenfunksjonene, og refleksjonskoeffisienten $r(k)$ for en innfallende planbølge med bølgetall k. Det er oppgitt at når potensialet u tilfredsstiller KdV-likningen, så er egenverdi-spektret invariant, og de øvrige spredningsdataene har følgende parameter-avhengighet:

$$a_n(t) = a_n(0)e^{4\kappa_n^3 t}$$

$$r(k,t) = r(k,0)e^{8ik^3 t}.$$

a) Anta at startpotensialet $u(x,0)$ har bare en eneste bunden tilstand $\lambda = -\kappa^2$, og er refleksjonsløst, dvs $r(k,0) = 0$.

Bruk invers-sprednings-metoden til å bestemme $u(x,t)$ ved senere tidspunkt.

b) Potensialet

$$u(x,0) = -\frac{10\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)}$$

i Schrödinger-problemet har en ikke-forsvinnende refleksjonskoeffisient, og har 2 diskrete egenverdier. La denne $u(x,0)$ være startprofilet i KdV-likningen, og skissér kvalitativt og uten regning hvorledes du venter $u(x,t)$ ser ut ved senere tidspunkt.

c) KdV-likningen kan bl.a. beskrive overflatebølger på vann. Under hvilke fysiske betingelser er dette en god beskrivelse? (Svar kort.)

Oppgave 3

En ikke-lineær oscillator kan beskrives ved følgende autonome dynamiske system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (1 - x^2 - y^2)x - \tfrac{1}{2}x \\ \dot{y} &= x - \tfrac{1}{2}y + (1 - x^2 - y^2)y.\end{aligned}$$

a) Origo i x,y-planet er et likevektspunkt (fikspunkt) for systemet. Klassifiser det med hensyn til stabilitet. Er der flere likevektspunkter?

b) Systemet har én grensesyklus i (x, y)-planet. Denne er en sirkel om origo. Finn denne grensesyklusen,og bestem dens stabilitet. Er resultatet rimelig ut fra det du fant i punkt a)?

Oppgave 4

I denne oppgaven studerer vi iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2,$$

med μ som kontrollparameter og med $|x_0| < 1$.

a) For $\mu < -\frac{1}{4}$ divergerer "banen", dvs $|x_n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Vis at dette er tilfelle.

I resten av oppgaven forutsettes det at $0 < \mu < 2$. (For $\mu > 2$ divergerer også banen. Dette skal ikke vises.)

b) Bestem iterasjonens fikspunkter. Et av disse fikspunktene er ikke relevant når kontrollparameter og startverdi er som angitt ovenfor. Hvorfor ikke? Hva er den største verdi μ_1 av kontrollparameteren som svarer til at det relevante fikspunktet er stabilt?

c) Vi ser så på periode-to baner som oscillerer mellom to verdier x_1 og x_2. Vis at

$$x_1 + x_2 = 1/\mu.$$

d) Hva er den største verdien μ_2 for kontrollparameteren for *stabil* periode to?

e) Hvilket fortegn venter du at iterasjonens Liapunov-eksponenten har for kontrollparametre som oppfyller $\mu_1 < \mu < \mu_2$?

Hvorledes forventer du at Liapunov-eksponenten varierer, kvalitativt sett, som funksjon av kontrollparameteren i dette intervallet? (Ingen utledninger er påkrevd for disse to spørsmålene.)

f) Beskriv kort en periodedoblingskaskade for en éndimensjonal iterasjon av denne type.

Vedlegg.

(Noe av dette kan du få bruk for.)

Konstruksjon av potensial fra spredningsdata:

- *Fra spredningsdataene κ_n, a_n og $r(k)$ dannes funksjonen*

$$B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r(k)e^{ikz}dk + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 e^{-\kappa_n z}.$$

- *Deretter løses den lineære integrallikning*

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^{\infty} K(x,z)B(y+z)dz = 0$$

med hensyn på $K(x,y)$.

- *Da er potensialet gitt ved*

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x).$$

Integraler:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\tan(x/2)$$