UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P. C. Hemmer
Tel. 3648

# EKSAMEN I FAG 74993 IKKE-LINEÆR DYNAMIKK

Torsdag 11. august 1994
kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

## Oppgave 1

For å gi en enkel beskrivelse av forløpet av en smittsom og dødelig epidemi deles befolkningen i tre klasser: $f(t)$ er antall friske, $s(t)$ er antall syke, og $d(t)$ er antall døde personer ved tida $t$. For enkelhets skyld betraktes $f$, $s$ og $d$ som kontinuerlige variable.

Da epidemien smitter fra person til person antas antallet av friske som blir syke å være proporsjonalt både med antall friske og med antall syke personer. Antall personer som dør antas å være proporsjonalt med antall syke. Disse antagelsene gir følgende dynamiske system

$$\dot{f} = -k_s\, f\, s \tag{1}$$
$$\dot{s} = k_s\, f\, s - k_d\, s \tag{2}$$
$$\dot{d} = k_d\, s, \tag{3}$$

der $k_s$ og $k_d$ er positive konstanter, og tidsderivasjon er symbolisert ved en prikk. (Modelleringen forutsetter at epidemien utvikler seg så raskt at vi kan se bort fra langsomme befolkningsendringer som fødsler, inn- og utvandring, samt sykdom og død p.g.a. andre årsaker.) Ved $t = 0$ er $f(0) \neq 0$, $s(0) \neq 0$, mens $d(0)$ settes lik null.

**a)** Vis at

$$f(t) + s(t) + d(t) = f(0) + s(0),$$

at likningene (1) og (3) gir

$$f(t) = f(0)\, e^{-k_s d(t)/k_d},$$

og at vi kan redusere det autonome systemet (1-3) til én likning for den ene variable $d(t)$:

$$\dot{d} = k_d \left[ f(0) + s(0) - d(t) - f(0)e^{-k_s d(t)/k_d} \right]. \tag{4}$$

**b)** Skalér de variable slik at likning (4) tar følgende dimensjonsløse form

$$\frac{du}{d\tau} = a - b\,u - e^{-u} \tag{5}$$

for den variable

$$u = \frac{k_s}{k_d}\, d,$$

og vis at $a > 1$ og $b > 0$.

Hvor mange fikspunkter (likevektspunkter) har denne likningen for $u$? Vis at det alltid er ett eneste fikspunkt $u^*$ i det relevante området for $u$.

**c)** Vis at dette fikspunktet $u^*$ er stabilt (tiltrekkende).

**d)** For $b < 1$ vil epidemien *kulminere* ved et bestemt tidspunkt $t_k$ der dødsraten $\dot{d}$ er størst. Vis dette ved vise at dødsraten *øker* til å begynne med, og tilslutt faller av til null. Du skal *ikke* beregne tidspunktet $t_k$. (Ordet "epidemi" vil bare benyttes om dette tilfellet $b < 1$.)

## Oppgave 2

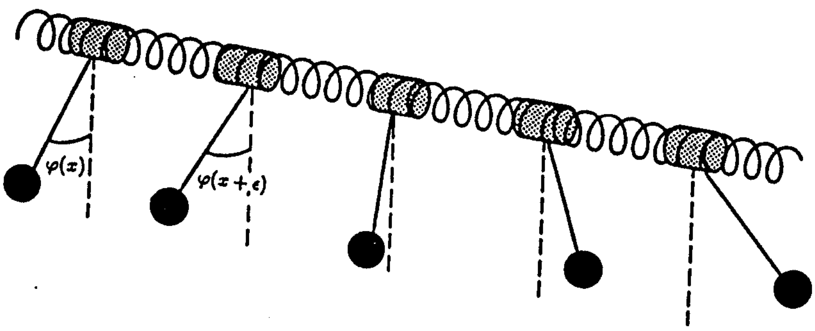
Sine-Gordon-likningen

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u$$

er en ikkelineær likning som er viktig i mange fysiske anvendelser.

**a)** Argumentér, ved å omskrive permanent-bølge-problemet til et mekanisk problem, for at denne sine-Gordon-likningen har solitære bølger, og for den generelle kvalitative form som disse må ha.

**b)** Vis at dynamikken for rotasjonsvinkelen $\varphi(x,t)$ for en pendel (på stedet $x$) i en kjede av harmonisk koplede pendler i tyngdefeltet, og med innbyrdes avstand $\epsilon$ langs $x$-aksen, kan i kontinuumsgrensen (bølgelengder $<<$ pendelavstand) beskrives ved sine-Gordon-likningen. (Se figur neste side.)




**c)** Vis at

$$\varphi = 4\tan^{-1} e^{\pm(x-x_0-ct)/\sqrt{1-c^2}},$$

er solitærbølgeløsninger for sine-Gordon-likningen. Her er $c$ en parameter, mindre enn 1 i tallverdi.

## Oppgave 3

**a)** For mange éndimensjonale iterasjoner (som den logiske avbildning) opptrer periodedoblingskaskader. Forklar kort hva en periodedoblingskaskade er, og hva Feigenbaumkonstantene $\delta$ og $\alpha$ er mål for. Hva innebærer det i denne sammenheng at to ulike iterasjoner er i samme universalitetsklasse?

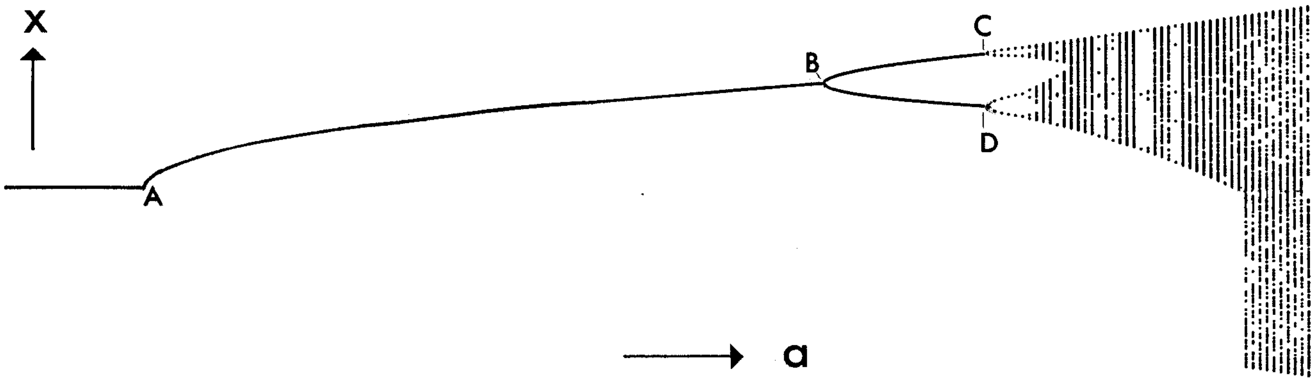
**b)** Vi skal nå studere iterasjonen

$$x_{n+1} = F(x_n) = ax_n - x_n^3,$$

der $x_n$ representerer *reelle* størrelser, og der $a$ er en positiv kontrollparameter. I motsetning til den logistiske avbildningen kan denne iterasjonen ha mer enn én attraktor for en bestemt verdi av kontrollparameteren.

Hva er iterasjonens fikspunkter $x^*$? For hvilke verdier av kontrollparameteren eksisterer disse fikspunktene, og for hvilke verdier er de stabile?

**c)** Nedenforstående figur viser iterasjonens attraktor som funksjon av kontrollparameteren i intervallet $0.8 < a < 2.7$, når en starter med $x_1 = 0.5$. Figuren er fremkommet ved at $a$ er øket i skritt på 0.01, og for hver $a$-verdi er verdiene $x_{201}$, $x_{202}$, .... $x_{499}$, $x_{500}$ plottet inn.




Hva er $a$- og $x$-koordinatene til punktene A og B på figuren? Hvilken forandring ville det gjort i figuren om vi hadde startet med $x_1 = -0.5$ ?

**d)** I figuren ser vi også periode-to-baner som oscillerer mellom to verdier $x_+$ og $x_-$. Vis at de to verdiene

$$x_\pm = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - 1}},$$

representerer en periode-to-bane, og at det samme gjelder for de to verdiene

$$x_\pm = -\sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - 1}}.$$

I hvilket intervall for kontrollparameteren er ovenstående periode-to-baner stabile? Hva er $a$- og $x$-koordinatene til punktene C og D i figuren?

**e)** Definer Lyapunoveksponenten $\lambda$ for en generell éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$. Vis at Lyapunoveksponenten kan uttrykkes som

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln |F'(x_i)|.$$

**f)** For iterasjonen i punkt b) er Lyapunoveksponenten en funksjon av kontrollparameteren, $\lambda = \lambda(a)$. Hva kan du si direkte uten regning om fortegnet til $\lambda$ i kontrollparameter-intervallet der vi har stabil fikspunkt-attraktor, og der periode-to-baner er stabile? Beregn $\lambda(a)$ eksplisitt i intervallet der vi har et stabilt fikspunkt.