NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 993 Ikkelineær dynamikk
Onsdag 6. mai 1998
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

a) Hva er en permanent bølge, hva er et soliton, og hva er forskjellen mellom disse begrepene?

I denne oppgaven tar vi for oss "sine–Gordon-ligningen"

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

for et felt $u = u(x,t)$. Vi skriver $u_t = \partial u/\partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$, osv..
Vi begrenser oss til å studere løsninger som har endelig energi, definert som

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}\, {u_t}^2 + \frac{1}{2}\, {u_x}^2 + 1 - \cos u \right) .$$

b) Hvilken ligning må den infinitesimale perturbasjonen $\delta u = \delta u(x,t)$ oppfylle for at feltene u og $u + \delta u$ begge skal være løsninger av sine–Gordon-ligningen?

c) Vis at energien E er en bevegelseskonstant.
Hva betyr betingelsen at E er endelig for den asymptotiske oppførselen til feltet u i grensene $x \to \pm\infty$?

d) Definer $\varphi(x) = 4 \arctan \mathrm{e}^x$.
Vis at $u(x,t) = \varphi(x)$ er en løsning av sine–Gordon-ligningen.
Vis at denne løsningen (et statisk tvinn) har energi $E = 8$.
Av denne spesielle løsningen kan en få andre løsninger ved speiling om origo ($x \to -x$), ved translasjoner og ved Lorentz-transformasjoner.
Hvordan ser disse nye løsningene ut, og hvilke energier har de?

e) La φ være definert som ovenfor, og definer $V(x) = \cos\varphi(x)$. Vis at

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\cosh^2 x} \; .$$

Vis (f.eks. ved å bruke at φ er en løsning av sine–Gordon-ligningen) at funksjonen $\psi = \varphi_x = \varphi'$ er en løsning av den stasjonære Schrödinger-ligningen

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi(x) = \epsilon\psi(x) \; ,$$

med egenverdien $\epsilon = 0$.
Hvilken egenskap ved bølgefunksjonen ψ forteller oss at den faktisk er grunntilstanden for denne Schrödinger-ligningen?

f) Den statiske løsningen $u(x,t) = \varphi(x)$ er et fikspunkt for sine–Gordon-ligningen.
Er dette fikspunktet stabilt eller ustabilt?

Oppgave 2:

a) Gitt en en-dimensjonal iterasjon $x_{k+1} = f(x_k)$.
Gitt et fikspunkt x_* for iterasjonen, dvs. at $x_* = f(x_*)$.
Vis at fikspunktet er stabilt når $|f'(x_*)| < 1$ og ustabilt når $|f'(x_*)| > 1$.
Gitt mer generelt en n-syklus $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = x_0 = f(x_{n-1})$.
Hva er kriteriet for om denne n-syklusen er stabil eller ustabil?

b) Vis at stabilitetskriteriet for et fikspunkt, i deloppgave a), er koordinatuavhengig.
Dvs., gitt en vilkårlig koordinat-transformasjon $y = h(x)$, slik at h er deriverbar, og at den inverse funksjonen h^{-1} eksisterer. Iterasjonen $x_{k+1} = f(x_k)$ svarer da til at $y_{k+1} = g(y_k)$, der $y_k = h(x_k)$, og funksjonen g er gitt av f og h. Fikspunktet x_* under a) transformeres over i et fikspunkt $y_* = h(x_*)$, med $y_* = g(y_*)$, og med samme stabilitet.
Er stabilitetskriteriet for en n-syklus koordinatuavhengig?
Er Lyapunov-eksponenten for en kaotisk attraktor,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k)| \; ,$$

koordinatuavhengig?

c) Hva slags attraktorer forekommer i et dynamisk system med kontinuerlig tid, i et tredimensjonalt faserom?
Hvordan kan de klassifiseres ved hjelp av Lyapunov-eksponentene?
Hvorfor er den ene Lyapunov-eksponenten gjerne lik 0?

d) Takens foreslo en metode til å studere eksperimentelt en attraktor i et faserom av ukjent dimensjon bare ved hjelp av en tidsserie av målinger av en enkelt variabel, med et konstant tidsintervall mellom målingene.
Hva går metoden ut på?

e) En student i ikkelineær dynamikk har generert to lange lister av tall, den ene ved en en-dimensjonal iterasjon, den andre (for sammenligning) ved hjelp av en generator for tilfeldige tall. Uheldigvis har han glemt hvilken liste som inneholder hva, på grunn av kaos i sine egne notater.

Liste nr. 1 starter med følgende tall:

$$-8,151\ ;\quad -2,523\ ;\quad 8,800\ ;\quad -4,596\ ;\quad 6,018\ ;\quad 3,174\ ;\quad 8,101\ ;\quad -2,370\ ;\quad 8,941\ .$$

Liste nr. 2 starter med:

$$-2,844\ ;\quad 5,918\ ;\quad -7,804\ ;\quad 0,634\ ;\quad 0,045\ ;\quad 1,020\ ;\quad 9,290\ ;\quad 0,448\ ;\quad 6,405\ .$$

Hjelp ham med å identifisere de to listene!