Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

**Eksamen i fag SIF 4088 Ikkelineær dynamikk**
Onsdag 29. november 2000
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

## Oppgave 1:

To arter, la oss si gjedde og abbor, spiser hverandre. Antallet gjedder og abbor ved tiden $t$ er henholdsvis $G(t)$ og $A(t)$. Vi antar at

$$\begin{aligned}\dot{G} &= Gf_1(A) = G\left(a_1 - b_1 A - \frac{c_1}{d_1 + A}\right),\\ \dot{A} &= Af_2(G) = A\left(a_2 - b_2 G - \frac{c_2}{d_2 + G}\right),\end{aligned}$$

der $\dot{G}$ og $\dot{A}$ er de tidsderiverte, og der alle konstantene $a_i, b_i, c_i$ og $d_i$, med $i = 1, 2$, er positive.

**a)** Gi en kort kvalitativ forklaring på hvilke effekter som kan gi opphav til de tre leddene $a_1$, $-b_1 A$ og $-c_1/(d_1 + A)$ i funksjonen $f_1(A)$.
Hva betyr det fysisk sett dersom $f_1(0) > 0$, eller dersom $f_1(0) < 0$?

**b)** Vis at $F_1(A) - F_2(G)$ er en bevegelseskonstant, der

$$\begin{aligned}F_1(A) &= \left(a_1 - \frac{c_1}{d_1}\right)\ln A + \frac{c_1}{d_1}\ln(d_1 + A) - b_1 A\,,\\ F_2(G) &= \left(a_2 - \frac{c_2}{d_2}\right)\ln G + \frac{c_2}{d_2}\ln(d_2 + G) - b_2 G\,.\end{aligned}$$

Vis mer generelt at bevegelsesligninger av formen $\dot{G} = Gf_1(A)$, $\dot{A} = Af_2(G)$ alltid har en bevegelseskonstant av formen $F_1(A) - F_2(G)$.

**c)** Vis at bevegelsesligningene ovenfor kan gjøres dimensjonsløse ved skalering slik at vi f.eks. får $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ og $b_2 = 1$.

I resten av denne oppgaven antar vi følgende parameterverdier:

$$f_1(A) = 1 - A - \frac{0,2}{0,15 + A} ,$$
$$f_2(G) = 2 - G - \frac{0,1}{0,2 + G} .$$

**d)** Ett fikspunkt til systemet er $G = A = 0$. Vis at dette er et sadelpunkt, og finn den stabile og ustabile mangfoldigheten til sadelpunktet.
Finn, og klassifiser, eventuelle andre fikspunkt i det fysisk interessante området, der $G \geq 0$ og $A \geq 0$.

**e)** Skisser et faseportrett i området $G \geq 0$ og $A \geq 0$.
Hva vil skje med bestandene av gjedde og abbor i løpet av mange år, i følge denne modellen, med de gitte parameterverdiene?
Kan bestandene variere kaotisk, enten med de gitte parameterverdiene eller med andre verdier av parametrene? Begrunn svaret.

**f)** Forklar kort hva som menes med at en kurve er en grensesyklus, en nullklin, en homoklin eller en heteroklin.
Hvis det finnes eksempler i faseportrettet ovenfor, så marker dem!

## Oppgave 2:

**a)** Anta at $u = u(x,t)$ er en løsning av Korteweg–de Vries-ligningen (KdV-ligningen)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 ,$$

der $u_t = \partial u/\partial t$, osv.. La $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ og $\epsilon$ være konstanter, og la

$$U(X,T) = \alpha + \beta u(x,t) ,$$

der

$$x = \gamma X + \delta T , \qquad t = \epsilon T ,$$

eller omvendt,

$$X = \frac{x}{\gamma} - \frac{\delta t}{\gamma \epsilon} , \qquad T = \frac{t}{\epsilon} .$$

Vis at $U = U(X,T)$ er en løsning av KdV-ligningen

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = 0$$

for vilkårlige verdier av $\gamma$ og $\delta$, dersom

$$\alpha = \frac{\delta}{6\gamma} , \qquad \beta = \gamma^2 , \qquad \epsilon = \gamma^3 .$$

**b)** Anta spesielt at $u = u(x,t) = \phi(x - ct)$ er en solitonløsning av KdV-ligningen. Solitonet beveger seg med konstant hastighet $c > 0$.
Hvilken ligning må funksjonen $\phi$ oppfylle?
Siden et soliton pr. definisjon er en lokalisert bølge, må begge grenseverdiene $\phi_+ = \lim_{x\to+\infty} \phi(x)$ og $\phi_- = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)$ eksistere. Vis at da må $\phi_+ = \phi_-$.
Når en studerer KdV-solitoner, er det vanlig å begrense seg videre til det tilfellet at $\phi_+ = \phi_- = 0$. Hvorfor er denne begrensningen uvesentlig?

**c)** Hvordan varierer høyden og bredden av et KdV-soliton med hastigheten?
(Høyde og bredde kunne vi eventuelt også kalle amplitude og bølgelengde. Utled f.eks. sammenhengen mellom hastighet, høyde og bredde ved hjelp av transformasjonen under punkt a) ovenfor.)

**d)** KdV-ligningen kan skrives som

$$u_t + [L, A] = 0 \ ,$$

der $L$ og $A$ er følgende Lax-par av operatorer:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t) \ , \\ A &= -4\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 6u(x,t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3u_x(x,t) \ . \end{aligned}$$

Bruk det til å vise at når $u(x,t)$ oppfyller KdV-ligningen, så er egenverdispektret til Schrödinger-operatoren $L$ uavhengig av $t$.

**e)** Vis at dersom den reelle bølgefunksjonen $\psi = \psi(x,t)$ er en løsning av ligningen $\psi_t = A\psi$, der $A$ er den samme operatoren som i punkt d), så er normeringsintegralet

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^2$$

en bevegelseskonstant.
I beviset er det nødvendig å gjøre visse antagelser om funksjonene $\psi(x,t)$ og $u(x,t)$. Presiser hvilke antagelser du gjør.
Hvorfor er dette resultatet av betydning når det gjelder å bruke invers-spredning-metoden til å løse KdV-ligningen?