NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag SIF 4088 Ikkelineær dynamikk
Mandag 10. desember 2001
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

Eieren av en bensinstasjon har en inntekt $I = (p - p_0)S$ (målt f.eks. i kroner pr. dag), der S er bensinsalget (i liter pr. dag), mens p er utsalgsprisen og p_0 innkjøpsprisen på bensin (i kroner pr. liter). Faste utgifter som ikke avhenger av salget, er ikke trukket fra. Vi antar at p_0 er konstant, mens S og p kan variere med tiden t.
Salget vil avta hvis prisen er høy og øke hvis prisen er lav, men den nøyaktige sammenhengen er ukjent for eieren, og derfor kan han ikke uten videre sette prisen slik at inntekten blir maksimal.
En rimelig modell for variasjonen i salget kan være at den tidsderiverte $\dot{S}$ er gitt av ligningen

$$\dot{S} = -a(p)\, S + b(p)\, (S_0 - S) \; , \tag{1}$$

der S_0 er en konstant som representerer den øvre grensen for hvor stort salget kan bli.
Koeffisientene $a(p)$ og $b(p)$ er positive og avhenger av prisen, de kan tolkes slik at a er proporsjonal med sannsynlighet pr. tid for å miste en fast kunde, mens b er proporsjonal med sannsynlighet pr. tid for å vinne en ny fast kunde. Det er klart at a er liten og b er stor når prisen er lav, og omvendt når prisen er høy.
I denne oppgaven antar vi at $S(t)$ oppfyller bevegelsesligningen (1).

a) Vis at det åpne intervallet $\langle 0, S_0 \rangle$ er et innfangingsområde (engelsk: "trapping region"). Det vil si: hvis ulikhetene $0 < S(t) < S_0$ gjelder ved ett tidspunkt t, så vil de samme ulikhetene gjelde ved alle senere tidspunkt.
Nedenfor antar vi alltid, om nødvendig, at $0 < S(t) < S_0$.

b) Vis at en konstant pris p vil resultere i at salget S går mot den konstante verdien

$$s(p) = \frac{b(p)\, S_0}{a(p) + b(p)} \; .$$

Finn en ligning for den konstante prisen som gir høyest inntekt over lang tid.

c) Hvis vi antar at

$$a(p) = \alpha\,\mathrm{e}^{\mu p}\ , \qquad b(p) = \beta\,\mathrm{e}^{-\nu p}\ ,$$

der α, μ, β og ν er positive konstanter, så får vi følgende ligning for den prisen som maksimaliserer inntekten:

$$p = p_0 + \frac{1}{\mu+\nu}\left(1 + \frac{b(p)}{a(p)}\right) = p_0 + \frac{1}{\mu+\nu}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\mu+\nu)p}\right) .$$

Vis at denne ligningen for p kan løses ved å starte med en vilkårlig verdi for p og så integrere differensialligningen

$$\dot{p} = -\eta\left(p - p_0 - \frac{1}{\mu+\nu}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\mu+\nu)p}\right)\right) ,$$

der η er en vilkårlig positiv konstant.

d) Ovenfor gjelder relasjonen (bevis forlanges ikke!)

$$1 + \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{S_0}{S_0 - s(p)}\ .$$

Vi tar nå for oss de to samtidige bevegelsesligningene

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -a(p)\,S + b(p)\,(S_0 - S)\ , \\ \dot{p} &= -\eta\left(p - p_0 - \frac{\gamma S_1}{S_1 - S}\right)\ , \end{aligned} \tag{2}$$

der γ og S_1 er positive konstanter, i tillegg til dem vi allerede har innført.
Hva kan du si om stabiliteten til eventuelle fikspunkt for disse bevegelsesligningene?
Hvis vi antar, som ovenfor, at

$$a(p) = \alpha\,\mathrm{e}^{\mu p}\ , \qquad b(p) = \beta\,\mathrm{e}^{-\nu p}\ ,$$

hvilke verdier må vi da velge for konstantene γ og S_1 for at fikspunktet til disse bevegelsesligningene skal være en konstant pris og et konstant salg som gir maksimal inntekt?

Oppgave 2:

a) For hvilke av følgende bevegelsesligninger i (x, y)-planet er origo et stabilt fikspunkt, et ustabilt fikspunkt, et sadelpunkt eller eventuelt noe annet:

i) $\dot{x} = x(2 - x - y),\ \ \dot{y} = x - y$
ii) $\dot{x} = x - y,\ \ \dot{y} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$
iii) $\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = x(1 + y) - 1$

b) Gitt et todimensjonalt autonomt dynamisk system.
Hva menes med indeksen til en lukket kurve, og indeksen til et fikspunkt for systemet?
Hva er indeksen til origo i de tre eksemplene under punkt a)?

c) Hva kan du si om antallet fikspunkt av ulike typer innenfor enhetssirkelen, dersom du vet at bevegelsesligningen i et vilkårlig punkt $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ på enhetssirkelen er: $\dot{x} = -\cos(2\varphi)$, $\dot{y} = \sin(2\varphi)$?

Oppgave 3:

a) Anta at $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ og $v(t)$ er en løsning av bevegelsesligningene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1-uv)u \ , \\ \dot{y} &= (1-uv)u \ , \\ \dot{u} &= -u \ , \\ \dot{v} &= v + (1-uv)(x-y) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Vis at da er $x+y$ og $xy-uv$ bevegelseskonstanter.

b) Størrelsene $x+y$ og $xy-uv$ er trasen og determinanten til 2×2-matrisen

$$L = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} .$$

Vis at hvis vi innfører 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

og velger a, b og c som passende funksjoner av x, y, u, v, så kan vi skrive bevegelsesligningene (3) på formen

$$\dot{L} = [A, L] \ ,$$

der $[A, L] = AL - LA$ er kommutatoren mellom matrisene A og L.

c) Anta generelt at 2×2-matrisene L og A er gitt som ovenfor, at a, b og c er vilkårlige funksjoner av x, y, u, v, og at bevegelsesligningen $\dot{L} = [A, L]$ er oppfylt.
Undersøk om trasen, determinanten og egenverdiene til L er bevegelseskonstanter.
Kan du generalisere til $N\times N$-matriser med $N = 3, 4, \ldots$?
Merk: for $N\times N$-matriser generelt kan det *kanskje* lønne seg å se på størrelsene $\tau_k = \operatorname{Tr} L^k$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$. Både determinanten og alle egenverdiene til matrisen L kan uttrykkes ved disse, f.eks. gjelder for $N = 2$ at

$$\det L = xy - uv = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr} L)^2 - \operatorname{Tr} L^2 \right) .$$

Kommentar: Matrisene L og A her er et Lax-par av *matriser*, på tilsvarende måte som differensialoperatorene

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t) \ , \\ A &= -4\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 6u(x,t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3u_x(x,t) \end{aligned}$$

er et Lax-par av *operatorer* som genererer Korteweg–de Vries-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (der $u_t = \partial u/\partial t$, osv.).