Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag TFY 4305 Ikkelineær dynamikk
Fredag 3. desember 2004
Tid: 09.00–13.00

Sensurfrist: Fredag 24. desember 2004

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

La $u = u(x,t)$ være en kompleks funksjon av en romkoordinat x og en tidskoordinat t. Ligningen

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + |u|^2\, u = 0 \ ,$$

der $u_t = \partial u/\partial t$ og $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$, kalles den kubiske Schrödingerligningen.
Vis at den har løsninger av formen

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax-bt)}\, \varphi(x-ct) \ ,$$

der a, b og c er konstanter, og der φ er en reell funksjon av en variabel $\xi = x-ct$ som oppfyller ligningen

$$\frac{1}{2}\,(\varphi')^2 + \frac{b-a^2}{2}\,\varphi^2 + \frac{1}{4}\,\varphi^4 = E \ .$$

Her er $\varphi' = \varphi_\xi = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\xi$, og E er en integrasjonskonstant.
Kan konstantene a, b og c velges uavhengig av hverandre?
Anta at $a^2 > b$. Hvilken verdi av E gir da en løsning $u(x,t)$ som er en solitærbølge?

Oppgave 2:

Bevegelsesligningen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx + x^3 = 0 \ ,$$

der b og k er konstante parametre, beskriver den såkalte Duffing-oscillatoren. Posisjonen x er en funksjon av tiden t, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ er hastigheten, og $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ er akselerasjonen.

a) Finn alle fikspunktene, og undersøk om de er stabile eller ustabile, for alle verdier av parametrene b og k.
Hva slags bifurkasjoner av fikspunktene forekommer?

b) Vis at energien

$$E = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{k}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x^4$$

er bevart dersom $b = 0$.

c) Anta at $b > 0$. Hva kan du da si om fortegnet til $\dot{E}$ (den tidsderiverte av E)?
Er de stabile fikspunktene globalt stabile?

Oppgave 3:

I denne oppgaven tar vi for oss Hénon-avbildningen

$$(x_n\,,\,y_n) \mapsto (x_{n+1}\,,\,y_{n+1}) = (1 + y_n - a x_n^2\,,\,b x_n)\ ,$$

der a og b er konstante parametre. Vi antar her at $a > 0$ og $b > 0$.
Jacobi-matrisen til avbildningen er

$$A = \frac{\partial(x_{n+1}\,,\,y_{n+1})}{\partial(x_n\,,\,y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a x_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} .$$

Egenverdiene til denne matrisen er $\lambda = -a x_n \pm \sqrt{a^2 x_n^2 + b}$.
Eliminasjon av y-koordinatene gir følgende rekursjonsformel for x-koordinatene alene:

$$x_{n+1} = 1 + b x_{n-1} - a x_n^2\ .$$

a) Vis at Hénon-avbildningen er invertibel (det vil si at x_n og y_n er entydige funksjoner av x_{n+1} og y_{n+1}). Finn eksplisitt den inverse avbildningen.

b) For hvilke verdier av parametrene a og b er Hénon-avbildningen arealbevarende? Begrunn svaret.

c) Vis at når $a > 0$ og $b > 0$, har avbildningen nøyaktig to fikspunkt, som vi kan kalle (x_+, y_+) og (x_-, y_-), og vis at x-koordinatene til fikspunktene er

$$x_\pm = \frac{b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}\ .$$

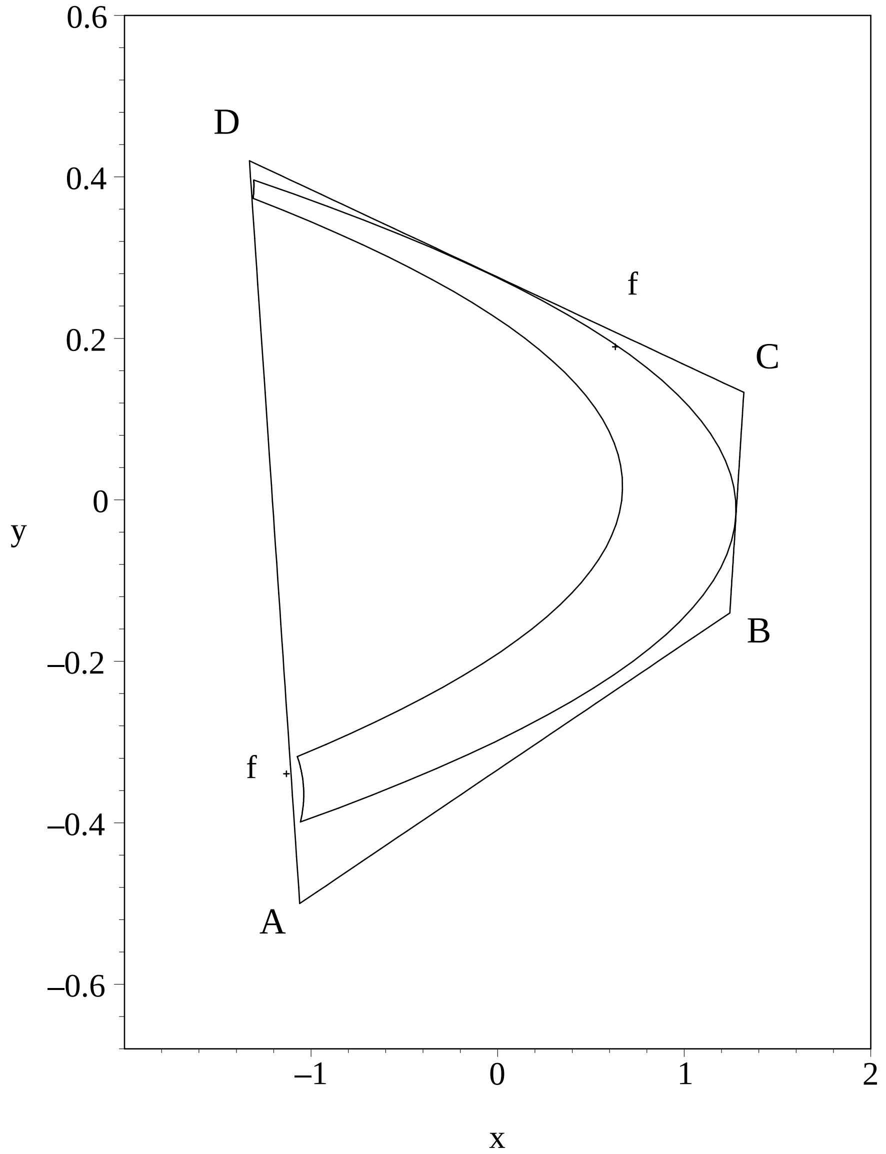
Det er opplagt at så lenge $a > 0$, er $x_+ > 0$ og $x_- < 0$.

d) Vis at fikspunktet (x_-, y_-) alltid er ustabilt (husk at vi hele tiden forutsetter at $a > 0$ og $b > 0$).
Vis at det andre fikspunktet (x_+, y_+) er stabilt når $0 < b < 1$ og $4a < 3(b-1)^2$, og ustabilt når $4a > 3(b-1)^2$.
Hvis vi for eksempel holder b konstant, $0 < b < 1$, og øker a, slik at fikspunktet (x_+, y_+) går over fra å være stabilt til å bli ustabilt ved $4a = 3(b-1)^2$, hva slags bifurkasjon er det da som skjer?

e) For hvilke parameterverdier eksisterer det en to-syklus, av formen
$(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) \mapsto (x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) \mapsto \ldots$?
Hvis vi igjen holder b konstant, $0 < b < 1$, og varierer a, slik at denne to-syklusen oppstår ved en bestemt kritisk verdi av a, hva slags bifurkasjon er det?
(Hvis du ikke vet svaret, er det tillatt å gjette!)

f) Vi velger nå parameterverdiene $a = 1{,}4$ og $b = 0{,}3$. Figur 1, se siste side, viser en firkant ABCD, med hjørnene $A = (-1{,}06\,,\,-0{,}5)$, $B = (1{,}245\,,\,-0{,}14)$, $C = (1{,}32\,,\,0{,}133)$ og $D = (-1{,}33\,,\,0{,}42)$.
Denne firkanten er et innfangingsområde for Hénon-avbildningen med disse parameterverdiene. Det bevises av figuren, idet firkanten ABCD avbildes på et område som avgrenses av parabelformete kurver, som er tegnet inn i figuren, og som ligger innenfor firkanten.
Hva er arealet av dette området, gitt at firkanten har areal 1,48?
Vis ved å tegne en figur, hvilke punkter A', B', C' og D' som de fire hjørnene A, B, C og D avbildes på.
Forklar ved hjelp av en tilsvarende figur, eventuelt flere figurer, hvordan det oppstår en "bisarr attraktor" (engelsk: strange attractor) med dimensjon mellom en og to.
Figuren viser de to fikspunktene, markert av pluss-tegn med bokstaven "f" ved siden av. Tegn gjerne inn (omtrentlig) også de to punktene som tilhører to-syklusen.

Figur:



Figur 1: Firkanten ABCD er et innfangingsområde (engelsk: trapping region) for Hénon-avbildningen med parameterverdiene $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$. To fikspunkt er markert med symbolet "+" og bokstaven "f".