NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2011

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Mandag 19. desember 2011
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Lykke til.

Oppgåve 1

$$\dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2 y \,, \tag{1}$$
$$\dot{y} = bx - ax^2 y \,, \tag{2}$$

der a og b er positive parametre, og $x, y > 0$.

a) Finn alle fikspunkta for dette likningssystemet. For kva verdiar av a og b er fikspunkta stabile?

b) Skisser x - og y-isoklinane (”nullclines”). Bruk dette til å konstruere eit innfangingsområde (“trapping region”) i xy-planet.

c) Vis at systemet gjennomgår ein Hopf-bifurkasjon for ein kritisk verdi $b_c(a)$ av b.

d) Bruk a) og b) til å vise at det finst ein grensesyklus. Eksisterer grensesyklusen for $b < b_c(a)$ eller for $b > b_c(a)$? Bruk dette til avgjere om bifurkasjonen er subkritisk eller superkritisk.

e) Finn ein tilnærma verdi for perioden til grensesyklusen.

Oppgåve 2

I denne oppgåva skal vi sjå på avbildninga

$$x_{n+1} = \frac{r x_n^3}{1 + x_n^4}\ , \tag{3}$$

der $r > 0$ er ein parameter.

a) Finn alle fikspunkta for avbildninga (3) som funksjon av r.

b) Finn stabiliteten til desse fikspunkta. Finst det ei periode-2 bane for denne avbildninga? Grunngje svaret.

Oppgåve 3

Denne oppgåva består av 3 spørsmål som er uavhengige av kvarandre.

a) På figur 1 kan du sjå dei første stega i konstruksjonen av Sierpinski-trekanten.

Figure 1: Sierpinski-trekanten.

Kva er arealet (Lebesgue målet) til Sierpinski-trekanten? Kva er den fraktale dimensjonen?

b) La $f(x)$ vere ein glatt funksjon og sjå på sekvensen $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n = 0, 1, 2, 3....$ Definer Lyapunov eksponenten λ for ei peridoisk bane med periode p som startar i x_0. Vis at $\lambda = -\infty$ for ei superstabil bane.

c) Eindimensjonale dynamiske system kan skrivast på forma

$$\dot{x} = f(x) , \tag{4}$$

der $f(x)$ er ein glatt funksjon. Gjer greie for dei ulike typane bifurkasjonar i slike system.
