NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2012

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Fredag 7. desember 2012
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåvesettet er på tre sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

Likninga for ein anharmonisk oscillator med demping kan skrivast som

$$\ddot{x} + b\dot{x} - kx + x^3 \;=\; 0\,, \tag{1}$$

der b og k er reelle parametre.

a) Kva er tolkninga av forteiknet til b og k? For kva verdiar av b og k er systemet konservativt?

b) Vis at likninga (1) kan skrivast som

$$\dot{x} = y \,, \tag{2}$$
$$\dot{y} = -by + kx - x^3 \,. \tag{3}$$

c) Finn fikspunkta og den tilhøyrande Jakobimatrisa til likningssystemet (2)-(3).

d) Finn eigenverdiane som høyrer til dei ulika fikspunkta som du fann i c).

e) I denne deloppgåva er $b \neq 0$ og $k \neq 0$. Klassifiser dei ulike fikspunkta som funksjon av b og k.

f) I dette delpunktet er $b = 0$. Klassifiser fikspunkta som funksjon av k.

g) I dette delpunktet er $k = 0$. Klassifiser fikspunkta som funksjon av b. Finn den kritiske verdien b_c for b der systemet gjennomgår ein bifurkasjon. Kva slags bifurkasjon er dette? Hint: Ikkje bruk linearisering, men fysisk intuisjon.

Oppgåve 2

Vi skal studere likningssystemet

$$\dot{x} = x - y - x^3 \,, \tag{4}$$
$$\dot{y} = x + y - y^3 \,. \tag{5}$$

a) Finn fikspunkta til dette likningssystemet. Hint: polynomet $x^8 - 3x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 2$ har ikkje nullpunkt på den reelle aksen.

b) Vis at likningssystemet har minst ei periodisk løysing. Hint: Poincare-Bendixon teoremet og $\frac{1}{2} \leq \cos^4 x + \sin^4 x \leq 1$.

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi studere teltavbildninga som er definert

$$t(x) = \begin{cases} rx \,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \,, \\ r(1-x) \,, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \,, \end{cases} \tag{6}$$

der $0 \leq r \leq 2$ er ein reell parameter og $x \in [0,1]$.

a) For kva verdiar av r er fikspunktet $x = 0$ stabilt? For kva verdiar av r er $x = 0$ globalt stabilt? Hint: Bruk spindelvev (cobweb).

b) Vis at punkta $(p,q) = (\frac{r}{1+r^2}, \frac{r^2}{1+r^2})$ er ein periode-2 syklus og finn verdiane av r der den eksisterer.

c) Er periode-2 syklusen i b) stabil? For kva verdiar av r er det kaos?