NTNU
Fakultet for Naturvitskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen TFY 4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2013

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Telefon: 73593131

Laurdag 21. desember 2013
kl. 09.00-13.00

Tillatne hjelpemiddel:
Godkjend kalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgåvesettet er på tre sider. Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi sjå på systemet vist i figur 1. I oppsettet kan dei to massane m gli på ei masselaus horisontal stang. Massen M er forbunden med dei to massane m med to like lange masselause snorer. Avstanden mellom massane m og z-aksen er R. Heile systemet roterer rundt z-aksen med vinkelfart ω. I punkt a) og b) er glir massane friksjonslaust på stanga. Bevaring av dreieimpuls kan skrivast

$$\ddot{R} + \alpha g - \frac{\beta}{R^3} = 0 \,. \tag{1}$$

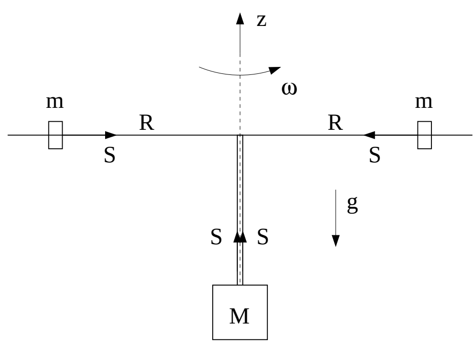

Figure 1: Oppsett i oppgåve 1.

a) Vis at likning (1) kan skrivast som eit system av to førsteordens likningar:

$$\dot{R} = u \,, \tag{2}$$

$$\dot{u} = -\alpha g + \frac{\beta}{R^3} \,. \tag{3}$$

b) Finn fikspunktet (R^*, u^*) for dette systemet. Lineariser systemet og finn kva type fikspunkt ein har. Forklar spesielt kvifor linearisering gjev rett svar.

c) I denne deloppgåva er det friksjon mellom massane m og stanga. Ein kan da vise at Newtons andre lov kan skrivast på forma

$$\ddot{R} + \gamma \dot{R} + \alpha g - \frac{\beta}{R^3} = 0 \,, \tag{4}$$

der $\gamma > 0$ er ein parameter. Omskriv liknikngа (4) til eit system av to førsteordenslikningar som i a). Finn fikspunktet (R^*, u^*) i dette tilfellet og klassifiser det som funksjon av parameteren γ. Gjer greie for banene i faserommet nær fikspunktet og gje ei fysisk tolkning.

Oppgåve 2

Likningane vi skal studere i denne oppgåva er

$$\dot{x} = a - x + x^2 y \,, \tag{5}$$

$$\dot{y} = b - x^2 y \,, \tag{6}$$

der $a > 0$ og $b > 0$ er parametrar. Vi skal sjå på systemet for $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Finn fikspunktet for systemet (5)–(6).

b) Finn likninga for kurva som deler a–b-planet i eit område der fikspunktet er stabilt og eit anna område der fikspunktet er ustabilt. Skissér denne kurva i a–b planet og indikér dei to områda.

c) Kva slags bifurkasjon gjennomgår systemet når ein kryssar kurva som du fann i b)?

Oppgåve 3

Likningane i denne oppgåva er ein modell for vekselverknaden mellom rovdyr og byttedyr

$$\dot{x} = x[x(1-x) - y] \,, \tag{7}$$

$$\dot{y} = y(x - a) \,, \tag{8}$$

der $x(t)$ er talet på byttedyr (sau) og $y(t)$ er talet på rovdyr (ulv), og $a \geq 0$ er ein konstant. Av gode grunnar må vi ha $x(t) \geq 0$ og $y(t) \geq 0$.

a) Skissér isoklinane ("nullclines") i første kvadrant. Bruk $a > 1$ i skissa. Indikér forteiknet til $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i dei ulike områda.

b) Finn fikspunkta til systemet (7)–(8) og klassifiser dei.

c) Vis at ulven døyr ut viss $a > 1$ Hint: Bruk resultata frå a).

d) Systemet gjennomgår ein Hopf bifurkasjon for ein kritisk verdi a_c av a. Finn a_c og finn frekvensen til grensesyklusen for $a \sim a_c$.

Oppgåve 4

Vi skal studere den diskrete avbildninga

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod 1 . \tag{9}$$

a) Finn fikspunkta til avbildninga (9).

b) Finn periode-2 syklusen. Er denne syklusen stabil?

c) Finn alle punkta $x_0 \in [0, 1)$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 . \tag{10}$$