Eksamen 6.6.92 i IKKE-LINEÆR DYNAMIKK

løsningsskisse

Oppgave 1

a) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}[-uu_x - u_{xxx} + 12\delta u^2 u_x]\,dx =$$

$$= \Big[-\tfrac{1}{2}u^2 - u_{xx} + 4\delta u^3\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\text{d.v.s.}: \quad \underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = \text{konstant}}}$$

b) Permanente bølger $u = u(x-ct)$ tilfredsstiller

$$-cu' + uu' + u''' = 12\delta u^2 u',$$

som integreres til

$$-cu + \tfrac{1}{2}u^2 + u'' = 4\delta u^3 + A.$$

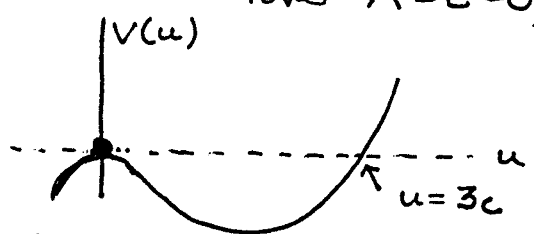
Multiplikasjon med u' og ny integrasjon gir

$$-\tfrac{c}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{2}u'^2 = \delta u^4 + Au + E, \quad \text{eller}$$

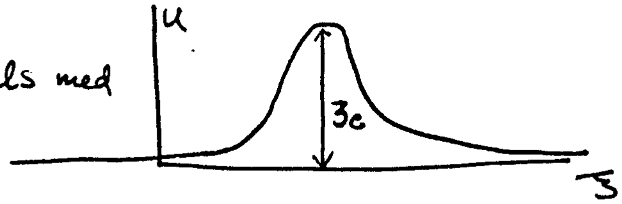
$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}u'^2 + V(u) = E}}, \quad \text{med} \quad \underline{\underline{V(u) = \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{c}{2}u^2 - \delta u^4 - Au}}.$$

Dette er et klassisk mekanisk problem i én dimensjon: En partikkel med masse 1 beveger seg i potensialet $V(u)$. $\xi = x - ct$ spiller rollen som den tidsvariable i det mekaniske problem.

c) $\boxed{\delta = 0}$ u, u', u'' for $x \to \infty$ krever $A = E = 0$, dvs $V(u) = \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{2}cu^2$.



Med null energi "ruller" massepunktet fra $u=0$ til $u = 3c$ og tilbake til $u=0$; en tur som tar ∞ lang tid.



Det svarer til en puls med pulshøyde $\underline{\underline{u_{max} = 3c}}$.

Vi har her forutsatt $c>0$. For $c \leq 0$ kan ikke $V(u)$ ha maksimum i origo (da $V''(0) = -c$), og da eksisterer ikke puls med $u(\pm\infty) = 0$.

Den eksplisitte form følger av den mekaniske bevegelseslikning. Vi har

$$u' = \pm\sqrt{-2V(u)} = \pm\sqrt{cu^2 - \tfrac{1}{3}u^3}$$

Med

$$u = \frac{3c}{y^2} \quad ; \quad du = -\frac{6c}{y^3}\,dy \qquad \text{fås}$$

$$-\frac{6c}{y^3}\frac{dy}{d\xi} = \pm\frac{3c^{3/2}}{y^3}\sqrt{y^2-1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \mp\frac{\sqrt{c}}{2}\,d\xi \,. \qquad \text{Integrasjon gir}$$

$$\cosh^{-1} y = \mp\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0),$$

der x_0 er en integrasjonskonstant. Dvs

$$y = \cosh\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0) = \cosh\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - x_0 - ct)\right]$$

og

$$u = \frac{3c}{y^2} = \underline{\underline{\frac{3c}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - x_0 - ct)\right]}}}$$

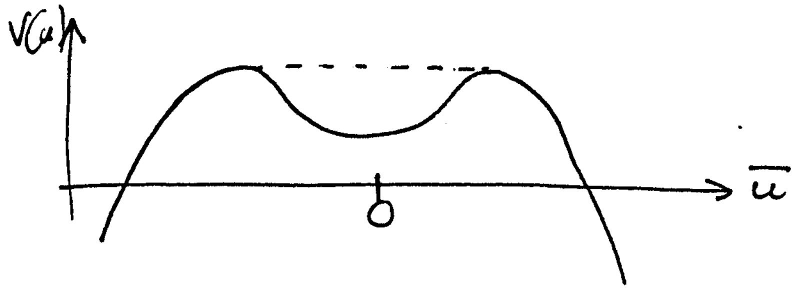
d) $\boxed{\delta > 0}$ Vi har

$$V(u) = -\delta\left(u - \frac{1}{24\delta}\right)^4 + \left(\frac{1}{96\delta} - \frac{c}{2}\right)\left(u - \frac{1}{24\delta}\right)^2$$

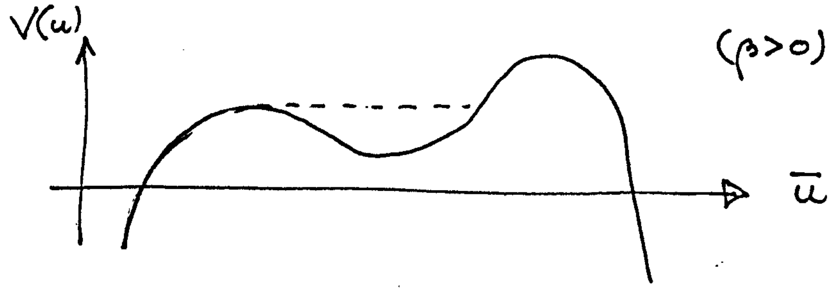
$$+\left[\frac{1}{1152\delta^2} - A\right]\left(u - \frac{1}{24\delta}\right) + \text{konstant}$$

$$\equiv -\delta\bar{u}^4 + \alpha\bar{u}^2 + \beta\bar{u} + \text{konstant} \qquad \left(\bar{u} = u - \frac{1}{24\delta}\right)$$

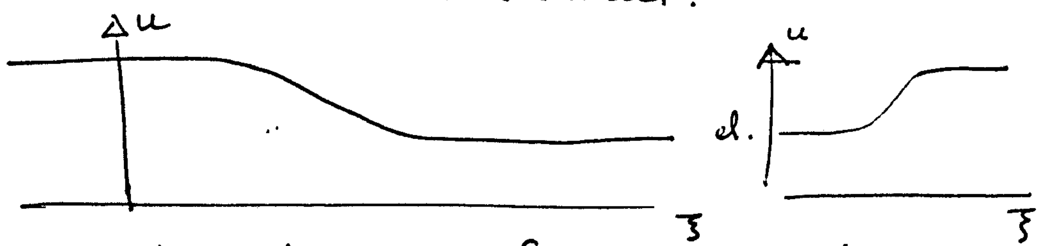
Både puls- og forskyvningsform krever et lokalt maksimum i potensialet. Da $V''(u) = -12\delta\bar{u}^2 + 2\alpha$ ser vi at det <u>aldri</u> er tilfelle for $\alpha < 0$, dvs $c > 1/48\delta$. For $\alpha > 0$ og $\beta = 0$ har potensialet to like høye maksima:



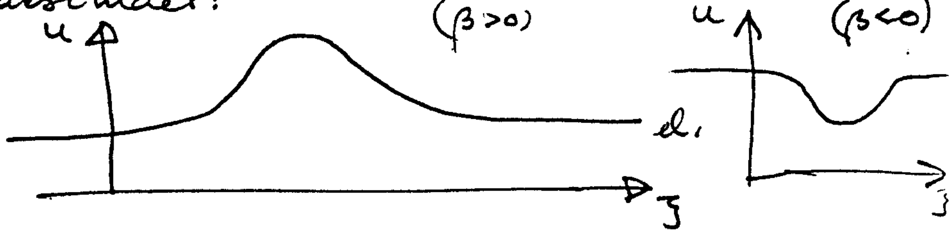
Ved å la $\beta \neq 0$ brytes symmetrien og ett maksimum blir det absolutte maksimum, det andre et lokalt maksimum:



For det øverste tilfellet vil vi få en forskyvning når massepunktet ruller fra det ene til det andre maksimaet:

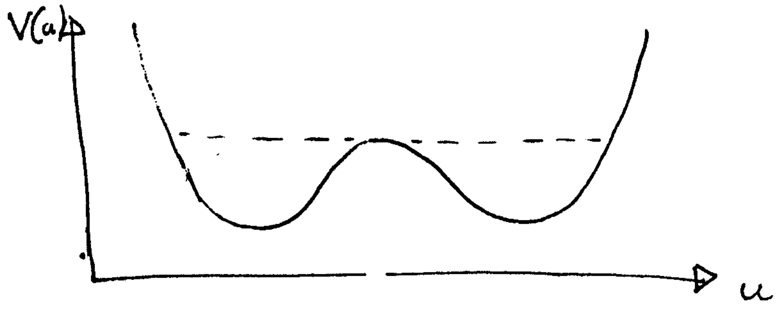


For det nederste potensialet får vi derimot en puls når massepunktet starter og ender på det lokale maksimaet:

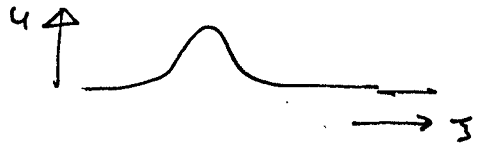


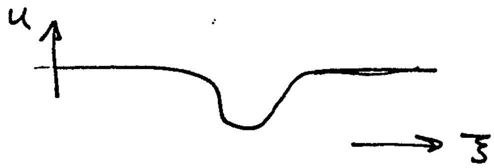
Da kravet $\alpha > 0$ svarer til $c < \frac{1}{488}$, ser vi at både positive og negative c er mulige, både for forskyvning- og puls-formene.

e) $\boxed{\delta < 0}$ I dette tilfellet vil $V \to +\infty$ for store $|u|$, og vi kan bare få høyst ett maksimum:



Vi kan ikke få forskyvning, men pulsform med positiv eller negativ puls ettersom partikkelen ruller tilhøyre eller tilvenstre:





Kravet til lokalt maksimum er at $\alpha < 0$ (ellers blir aldri $V'' = 0$ noe sted), dvs $c > 1/48\delta$. Pulsen må bevege seg mot venstre.

Oppgave 2

a) Med de gitte betingelser blir funksjonen B i Gel'fand-Levitan-Marchenko-likningen:

$$B(z) = a^2 e^{-\varkappa x},$$

og integrallikningen blir

$$K(x,y) + a^2 e^{-\varkappa(x+y)} + a^2 \int_x^\infty K(x,z)\, e^{-\varkappa(z+y)}\, dz = 0$$

Multiplikasjon med $e^{\varkappa y}$ gir

$$e^{\varkappa y} K(x,y) + a^2 e^{-\varkappa x} + a^2 \int_x^\infty K(x,z)\, e^{-\varkappa z}\, dz = 0.$$

De to siste ledd er uavhengige av y, da er også første ledd det

$$e^{\varkappa y} K(x,y) \equiv F(x).$$

Innsatt for K:

$$0 = F(x) + a^2 e^{-\varkappa x} + a^2 \int_{x}^{\infty} F(x)\, e^{-2\varkappa z} dz = F(x) + a^2 e^{-\varkappa x} + a^2 F(x) \frac{1}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}$$

Løst mhp F:

$$F(x) = -\frac{a^2 e^{-\varkappa x}}{1 + \frac{a^2}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}$$

$$K(x,x) = e^{-\varkappa x} F(x) = -\frac{a^2}{e^{2\varkappa x} + a^2/2\varkappa}$$

Tilslutt potensialet

$$\underline{\underline{u(x) = -2 K_x(x,x) = -\frac{4a^2 \varkappa\, e^{2\varkappa x}}{(e^{2\varkappa x} + a^2/2\varkappa)^2}}}$$

Alternativ form ved å sette $a^2/2\varkappa \equiv e^{2\varkappa x^*}$

$$u(x) = -\frac{8\varkappa^2 e^{2\varkappa x + 2\varkappa x^*}}{(e^{2\varkappa x} + e^{2\varkappa x^*})^2} = -\frac{8\varkappa^2}{[e^{\varkappa(x-x^*)} + e^{-\varkappa(x-x^*)}]^2}$$

$$\underline{\underline{= -\frac{2\varkappa^2}{\cosh^2[\varkappa(x-x^*)]}}}$$

Ved å skrive ut t-avhengigheten eksplisitt vha

$$a(t) = a(0)\, e^{4\varkappa^3 t},$$

dvs

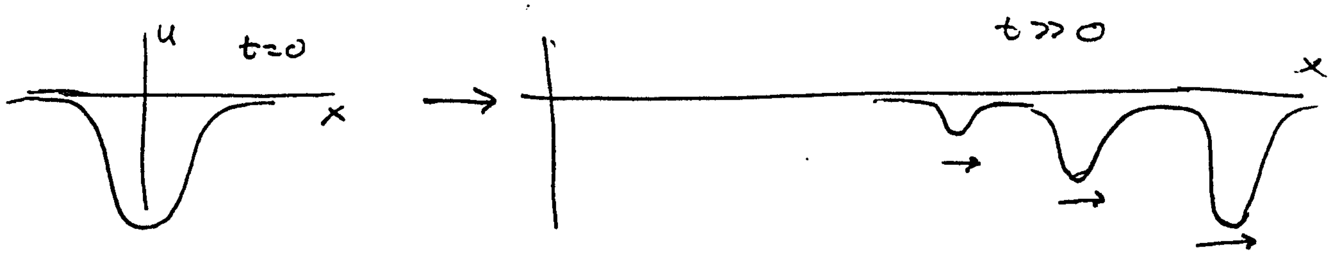
$$e^{2\varkappa x^*} = \frac{a^2}{2\varkappa} = \frac{a(0)^2}{2\varkappa} e^{8\varkappa^3 t} \equiv e^{2\varkappa x_0} e^{8\varkappa^3 t},$$

fås

$$\underline{\underline{u(x,t) = -\frac{2\varkappa^2}{\cosh^2[\varkappa(x - x_0 - 4\varkappa^2 t)]}}}$$

Hastigheten er $c = 4\varkappa^2 = 4|\lambda|$.

b) Tre bundne tilstander gir 3 solitoner med hastigheter $36\alpha^2$, $16\alpha^2$ og $4\alpha^2$ ifg a). Så vi venter at den "negative toppen" separeres i 3 soliton"topper":



c) KdV-likningen er en god beskrivelse for overflatebølger som er svakt ikke-lineære og svakt dispersive, som vil si

amplitude ≪ vanndybde ≪ karakteristisk bølgelengde.

(I tillegg må (i) bølgelengdene ikke være så små at overflatespenninga spiller noen rolle, i praksis > ca 5 cm; (ii) viskositeten være liten, godt oppfylt for vann, og (iii) bevegelsen være i en retning)

Oppgave 3

$$\dot{x} = p$$
$$\dot{p} = -x - (x^2+p^2-1)p$$

a) Likevektspunkter er der høyre-sidene er null, som her er bare i origo, $x=0, p=0$.

Den lineariserte iterasjon er

$$\dot{x} = p \qquad \text{eller} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix}$$
$$\dot{p} = -x+p$$

$$\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix} \propto e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \text{):} \quad \lambda^2-\lambda+1=0$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Da $\mathrm{Re}\,\lambda_\pm > 0$ er fikspunktet i origo frastøtende.
(At $\mathrm{Im}\,\lambda_\pm \neq 0$ dessuten viser spiralisering er mindre viktig. For $p>0$ er $\dot{x}>0$ så det spiraliseres ut i negativ omløpsretning)

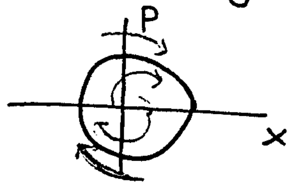
b)
$$\dot{x} = p \quad \Rightarrow \quad x\dot{x} = xp$$
$$\dot{p} = -x-(x^2+p^2-1)p \Rightarrow \quad p\dot{p} = -xp-(x^2+p^2-1)p^2$$

Addisjon gir $\quad x\dot{x}+p\dot{p} = -(x^2+p^2-1)p^2$

eller $\quad \frac{d}{dt}(x^2+p^2) = -2(x^2+p^2-1)p^2$

Vi ser at $x^2+p^2=1$ gir $\frac{d}{dt}(x^2+p^2) = 0$, så punkter på sirkelen x^2+p^2 1 forblir på sirkelen. Punkter utafor, $x^2+p^2>1$, trekkes innover, $\frac{d}{dt}(x^2+p^2) \leq 0$, og omvendt, så $\underline{\underline{x^2+p^2=1}}$ er en tiltrekkende grensesyklus.

Det globale bildet med frastøtende fikspunkt i origo og en attraktiv grensesyklus rundt origo er konsistent.

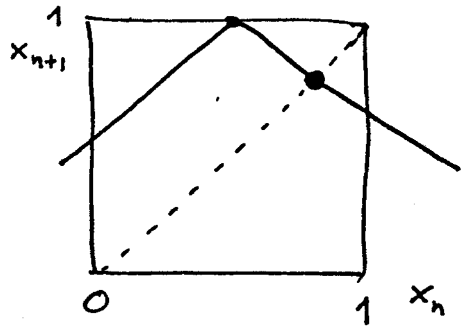


Oppgave 4

a) Da $\left|\frac{dx_{n+1}}{dx_n}\right| = a$ så venter vi periodiske bane for $a<1$ og kaotisk bane for $a>1$. Figuren viser tydeligvis et fikspunkt for $a \in (0,1)$. Fikspunktlikningen er

$$x^* = 1 - a(x^* - \tfrac{1}{2})$$

$$x^*(a) = \underline{\underline{\frac{1+\frac{a}{2}}{1+a}}}$$



Dette er kurve A, som går fra $x^*(0)=1$ til $x^*(1)=3/4$.

b) For $a>1$ fås kaotisk bane. Med

$$F(x) = 1 - a|x - \tfrac{1}{2}|$$

ser vi at etter én iterasjon holder banen seg over $F(1) = 1 - a/2$, slik at $0 \leq x < F(1)$ kan ikke tilhøre attraktoren. Kurve B er grenselinjen

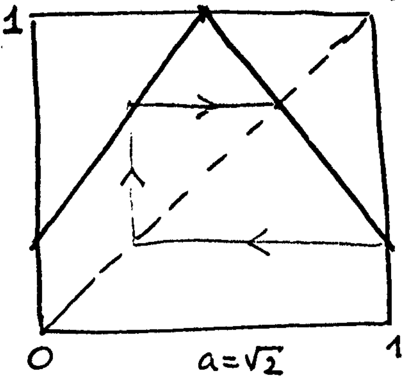
$$B: x = F(1) = \underline{\underline{1 - \frac{a}{2}}}$$

en rett linje fra $a=1, x=\frac{1}{2}$ til $a=2, x=0$.

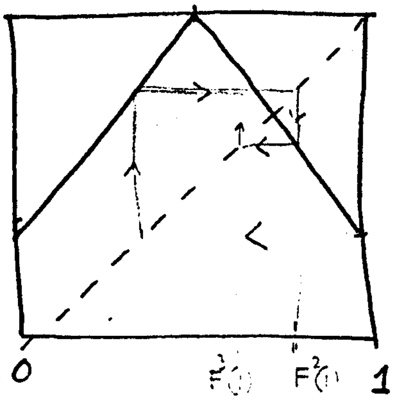
c) Med $a=\sqrt{2}$ og $x_0 = 1$ blir $x_1 = F(1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = F^2(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $x_3 = F^3(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Da $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ er et fikspunkt blir alle $x_{m>3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ også.

d) Vi fant allerede i c) at maksimalverdien 1 ble, for $a=\sqrt{2}$ avbildet inn i det ustabile fikspunktet

$F^2(1) = F^3(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(a=\sqrt{2})$.



La oss nå senke verdien av a litt under $\sqrt{2}$. Da vil maksimalverdien etter to iterasjoner avbildes litt over det ustabile fikspunktet, og etter tre iterasjoner litt under (se figur). Det er intuitivt klart, og kan også ses av uttrykkene



$F^2(1) = 1 - \frac{a(a-1)}{2}$

$x^*(a) = \frac{1+a/2}{1+a}$

$F^3(1) = 1 - \frac{a}{2}(1-a+a^2)$.

Påstanden er at $F^3(1) < x < F^2(1)$ ikke kan tilhøre attraktoren. Det er så fordi ingen x avbildes inn i dette intervallet etter to iterasjoner, og punkter innen intervallet (fikspkt unntatt) arbeider seg ut da $|F'| > 1$.

$$x_C = F^2(1) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a + 1}}$$

$$x_D = F^3(1) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}a + 1}}$$

Vi ser at $\left\{ \begin{array}{l} x_C(1) = 1 \;;\; x_C(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_D(1) = \frac{1}{2} \;;\; x_D(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\}$ som ventet.

e) Periodiske baner har $\lambda < 0$, kaotiske har $\lambda > 0$, så λ ventes å skifte tegn ved $a=1$.

Da $|F'| = a$ konstant er

$$\lambda(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|F'(x_i)| = \underline{\underline{\ln a}}$$

Denne funksjonen er, som ventet, positiv for $a>1$, negativ for $a<1$.