

IKKELINEÆR DYNAMIKK

Eksamen 8.6.1994

LØSNINGSSKISSE

Oppgave 1

Faseforskjellen $\alpha = \Theta - \varphi = \Omega t - \varphi$ oppfyller differensiallikningen

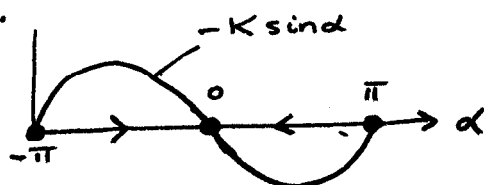
$$\dot{\alpha} = \Omega - \dot{\varphi} = \underline{\Omega - \omega - K \sin \alpha}$$

Denne er basis for diskusjonen.

a) Med $\Omega = \omega$ fås

$$\dot{\alpha} = -K \sin \alpha.$$

Fikspunkter tilfredsstiller $\dot{\alpha} = 0$, dvs $\sin \alpha^* = 0$, dvs $\alpha^* = 0$ og $\pm\pi$.



Vi ser at $\dot{\alpha} < 0$ for $0 < \alpha < \pi$ og $\dot{\alpha} > 0$ for $-\pi < \alpha < 0$, som pilene på figuren viser. Alltid er $\alpha^* = 0$ det eneste attraktive fikspunktet (i fundamentalintervallet).

Verdien $\alpha^* = 0$ vil si at (etter transienter) følger ildfluen signalet uten faseforskjell. Dette er situasjonen når andre ildfluer er signalgivere - fullstendig synkronisering med andre ord.

(2)

b) Så $\Omega \neq \omega$. Likevektspunkt $\dot{\alpha} = 0$

for $\omega + K \sin \alpha = \Omega$,

som bare kan oppfylles for

$$\underline{\underline{\omega - K \leq \Omega \leq \omega + K}}$$

Dvs.

$$\underline{\underline{K = \omega_1}}$$

$$\alpha^* = -\frac{\pi}{2} \text{ for } \underline{\underline{\Omega = \omega - K = \omega - \omega_1}}$$

c) Av $\frac{d\alpha}{dt} = \Omega - \omega - K \sin \alpha$, eller

$$dt = \frac{d\alpha}{\Omega - \omega - K \sin \alpha}$$

fås $\int_0^{\tau} dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{\Omega - \omega - K \sin \alpha}$

Integrasjon:

$$\tau = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - K^2}}}}$$

Oppgave 2

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$$

a) Integrasjon av KdV,

$$u_t = \left(-\frac{u^2}{2} - u_{xx} \right)_x,$$

fra $x = -\infty$ til $x = +\infty$ gir

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) dx = \left[-\frac{u^2}{2} - u_{xx} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \text{ dvs}$$

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) dx = \text{konstant} = C_1}}$$

③

Multiplikasjon av KdV med u gir

$$u u_t = -u^2 u_x - u u_{xxx},$$

som kan omskrives til

$$\left(\frac{1}{2} u^2\right)_t = \left(-\frac{u^3}{3} - u u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^2\right)_x.$$

Integrasjon fra $x = -\infty$ til $x = +\infty$ gir

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \left[-\frac{u^3}{3} - u u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \text{ da}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \text{konstant} = C_2$$

b) Tyngdepunktet er $X = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x u(x, t) dx,$
så

$$X_t = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x u_t dx = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x (-u u_x - u_{xxx}) dx =$$

$$= -\frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right)_x dx = -\frac{1}{C_1} \left[x \left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+ \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) dx \text{ ved en delvis integrasjon.}$$

For en "lokalisert" puls forutsettes overflateleddet forsvinne, og likeledes er $\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} dx = [u_x]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$

Altså er

$$\underline{\underline{X_t = \frac{C_2}{C_1} = \text{konstant}}}}$$

c) Når potensialet i det assosierte Schrödinger-ligning-problem er refleksjonsløst vil det asymptotiske forløp bare være solitoner, ikke noe stråling.

Bevegelseskonstantene gir

$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) dx = \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3c_i}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c_i}x]} dx$$

$$= \sum_{i=1}^2 6\sqrt{c_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} = \sum_{i=1}^2 12\sqrt{c_i}$$

og

$$C_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9c_i^2}{2\cosh^4[\frac{1}{2}\sqrt{c_i}x]} dx$$

$$= \sum_{i=1}^2 9c_i^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^4 x} = \sum_{i=1}^2 12c_i^{3/2}$$

Altså to likninger for de to ukjente c_1 og c_2 :

$$\text{I} \quad \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} = \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) dx \equiv I_1 = \text{kjent}$$

$$\text{II} \quad (\sqrt{c_1})^3 + (\sqrt{c_2})^3 = \frac{1}{24} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,0) dx \equiv I_2 = \text{kjent}$$

Eliminer $\sqrt{c_2}$:

$$(\sqrt{c_1})^3 + (I_1 - \sqrt{c_1})^3 = I_2, \quad \text{eller}$$

$$-3I_1^2\sqrt{c_1} + 3I_1c_1 = I_2 - I_1^3$$

$$c_1 - I_1\sqrt{c_1} = \frac{I_2}{3I_1} - \frac{I_1^2}{3}$$

$$(\sqrt{c_1} - \frac{1}{2}I_1)^2 = \frac{I_2}{3I_1} - \frac{I_1^2}{12}$$

$$c_1 = \left(\frac{1}{2}I_1 \pm \sqrt{\frac{I_2}{3I_1} - \frac{I_1^2}{12}} \right)^2$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{2}I_1 \mp \sqrt{\frac{I_2}{3I_1} - \frac{I_1^2}{12}} \right)^2$$

⑤

d) KdV-likningen er en god beskrivelse for overflatebølger som er svært ikke-lineære og svært dispersive, som igjen inntrer for

$\boxed{\text{bølgehøyde} \ll \text{væskedybde} \ll \text{karakteristiske bølgelengde}}$

Viskositet og overflate-spennning er neglisjert, og det er "énvegs" bølgeutbredelse som er beskrevet. Bunnen er horisontal.

Oppgave 3

a) I en periodedoblingskaskade opptrer en uendelig rekke stabile periodiske baner, slik at via bifurkasjon ved et sett parameterverdier $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ fordobles perioden hver gang. Periodene blir altså $m \cdot 2^m$, $m=0, 1, 2, \dots$, der m er en grunnperiode (1 i det enkleste tilfellet).

Mer kvantitativt vil parametersettet $\{\mu_n\}$ konvergere mot en grenseverdi μ_∞ , asymptotisk som

$$\mu_\infty - \mu_n \propto \delta^{-n},$$

der δ er en karakteristisk konstant.

(En annen konstant α skalerer med attraktorverdiene når n øker).

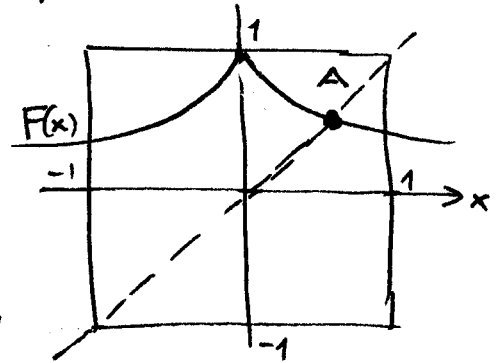
To iterasjoner er i samme universalitetsklasse når de har samme verdi for δ (og α).

(6)

b) $x \rightarrow F(x) = 1 - \mu \sqrt{|x|}$

Da $x_{n+1} - x_n = 1 - \mu \sqrt{|x_n|} - x_n$ forholder seg som $x_{n+1} - x_n \approx -x_n$ for store $|x_n|$ så ser vi at dersom x_n blir stor og negativ vil $x_{n+1} > x_n$ og dersom x_n er stor og positiv vil $x_{n+1} < x_n$. Derfor kan ikke iterasjonen divergere.

c) A er tydeligvis et fikspunkt som er stabilt. For små μ er det bare ett fikspunkt, for $x > 0$, og det er stabilt for små μ .



Likningen er bestemt av

$$x^* = 1 - \mu \sqrt{x^*}$$

$$\mu^2 x^* = (1 - x^*)^2 = 1 - 2x^* + x^{*2}$$

$$(x^* - 1 - \frac{1}{2}\mu^2)^2 = \frac{\mu^4}{4} + \mu^2$$

$$x^* = 1 + \frac{1}{2}\mu^2 \pm \sqrt{\frac{\mu^4}{4} + \mu^2} = \underline{\underline{1 + \frac{1}{2}\mu^2 - \mu \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}}}$$

Da $x^* < 1$ må vi velge $-$ -tegnet.

Dette fikspunktet er en attraktor så lenge det er stabilt. Stabilitetskravet er $|F'(x^*)| < 1$. Vi har (da $x^* > 0$)

$$\begin{aligned} F'(x^*) &= -\frac{\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{x^*}} = -\frac{\mu^2}{2(1-x^*)} = -\frac{\mu^2/2}{-\frac{1}{2}\mu^2 + \mu \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}} \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 4\mu^{-2}}}, \end{aligned}$$

7

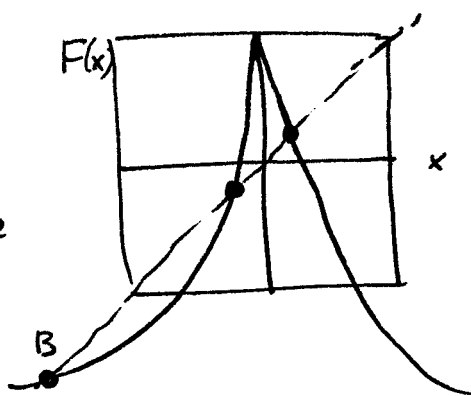
og $F'(x^*) = -1$ for $1 + 4\mu^2 = 4$ dvs

$$\underline{\underline{\mu_A = \frac{2}{\sqrt{3}}}}$$

Vi får $x_A = \frac{\mu_A^2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

Ser ut til å stemme bra med figuren.

d) For $\mu > 2$ får vi to nye fikspunkt, begge for $x < 0$. Fikspunktet for $x > 0$ er ustabil, og vi ser at bare det venstre fikspunktet er stabilt. Dette må være kurve B.



Likningen er bestemt

av

$$x^* = 1 - \mu \sqrt{-x^*}$$
$$-\mu^2 x^* = (1 - x^*)^2 = 1 - 2x^* + x^{*2}$$
$$(x^* + \frac{\mu^2}{2} - 1)^2 = \frac{\mu^4}{4} - \mu^2$$

$$\underline{\underline{x^* = 1 - \frac{\mu^2}{2} - \sqrt{\frac{\mu^4}{4} - \mu^2}}}$$

Pluss-tegnet fram $\sqrt{\quad}$ gir det ustabile negative fikspunktet. Vi får $x^*(\mu=2) = -1$ og $x^*(\mu=2.3) = -2.95$ som stemmer fint med figuren!

e) Da $F(x) \leq 1$ vil $x_n < 1 - \mu\sqrt{1} = 1 - \mu$ for $\mu \geq 2$. Så $\underline{\underline{x = 1 - \mu}}$ er en nedre begrensning og tydeligvis kurve C.

8

f) Lyapunov eksponenten er et mål for hvorledes avstanden mellom to nabopunkter (x_0 og $x_0 + \epsilon$) endres seg under iterasjonen.

Mer presist er

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x_n(x_0 + \epsilon) - x_n(x_0)}{\epsilon} \approx e^{m\lambda} \cdot \text{konstant}$$

for store m . Dvs

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \left| \frac{dx_n(x_0)}{dx_0} \right|.$$

Med $x_{n+1} = F(x_n)$ er

$$\frac{dx_n(x_0)}{dx_0} = \frac{dx_n}{dx_{n+1}} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dx_{n-2}} \cdots \frac{dx_1}{dx_0} = F'(x_{n-1}) F'(x_{n-2}) \cdots F'(x_0)$$

slik at

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)| \quad \text{eller} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(x_i)|$$

om en vil.

g) Attraktive periode baner, som fikspunkt, må ha $\lambda < 0$, for kaotiske baner er $\lambda > 0$. Så

$$\lambda(\mu) \text{ er } \begin{cases} \text{positiv for } \mu_A < \mu < 2 \\ \text{negativ for } \mu < \mu_A \text{ og } 2 < \mu \end{cases}$$

For verdien μ_A mister fikspunktet stabilitet fordi $F'(\mu_A) = -1$. Da er $\lambda = \ln |F'(\mu_A)| = \underline{\underline{0}}$.

(9)

h) For et fikspunkt er alle $F'(x_i)$ like store, slik at

$$\lambda = \ln |F'(x^*)|.$$

J punkt c) fant vi $F'(x^*) = -\frac{1}{\sqrt{1+4\mu^2}-1}$,

dos

$$\lambda = -\ln(\sqrt{1+4\mu^2}-1)$$

for kurve A.

Verdien $\lambda = -\infty$ viser at konvergensten til fikspunktet er "raskere enn eksponensiell" (slik som for superstabile baner). Da iterasjonene for $\mu=0$ er $x_{n+1} = 1$ simpelthen havner banen på fikspunkt etter første iterasjon - meget raskt!

i) Innsetting av den oppgitte fordeling på venstre side av Perron-Frobenius-likningen gir

$$vS = \int p(x) \delta(y - F(x)) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1-x}{2} \delta(y - 1 + 2\sqrt{|x|}) dx$$

Deltafunksjonen har argument null for $x_{\pm} = \pm \left(\frac{1-y}{2}\right)^2$, så

$$vS = \sum_{\pm} \frac{1-x_{\pm}}{2} \frac{1}{\left|\frac{1}{\sqrt{|x_{\pm}|}}\right|} = \frac{|1-y|}{2} \sum_{\pm} \frac{1-x_{\pm}}{2} = \frac{|1-y|}{2},$$

da $\sum_{\pm} x_{\pm} = 0$. Dette er for $y \in [1, +1]$ lik høyre side, $p(y)$, av Perron-Frobenius.

Og det er lett å se at for $x \in [-1, +1]$ vil $y = 1 - 2\sqrt{|x|}$ også $\in [-1, +1]$.

Alternativt bevis:

Perron-Frobenius gir

$$\rho(1-2x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dy \delta(\sqrt{|y|} - x) \rho(y) \quad \text{og}$$

med $y = \pm u^2$: $dy = \pm 2u du$:

$$\boxed{\rho(1-2x) = x \rho(x^2) + x \rho(-x^2)}$$

som tilfredsstilles av $\rho(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, idet

$$\frac{1}{2}(1 - (1-2x)) = x \frac{1}{2}(1-x^2) + x \frac{1}{2}(1+x^2).$$

*

Tilslutt beregning av $\lambda(2)$ ved fase-
midling:

$$\begin{aligned} \lambda &= \int \rho(x) \ln |F'(x)| dx \\ &= \int \rho(x) \ln \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1-x}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = -\frac{1}{4} \cdot 2 \int_0^1 \ln x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[x \ln x - x \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$