Ikke-lineær dynamikk 11.08.94

Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Addisjon av likningene (1) + (2) + (3) gir

$$\dot f + \dot s + \dot d = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) + s(t) + d(t) = \text{konstant},$$

$\supset$:
$$\underline{\underline{f(t) + s(t) + d(t) = f(0) + s(0)}} \qquad (*)$$

Likning (1) er $\frac{d}{dt} \ln f = -k_s s$, og

Likning (3) er $\frac{d}{dt} \; d = k_d s$, så

$$\frac{d}{dt} \left(k_d \ln f + k_s d \right) = 0,$$

dvs $\ln f + \frac{k_s}{k_d} d = \text{konstant} = \ln f(0)$, eller

$$\underline{\underline{f(t) = f(0)\, e^{-\frac{k_s}{k_d} d(t)}}} \qquad (**)$$

Av $(*)$ og $(**)$ fås $\quad s = f(0) + s(0) - d(t) - f(0)\, e^{-\frac{k_s}{k_d} d(t)}$

som innsatt i (3) gir

$$\underline{\underline{\dot d = k_d \left[f(0) + s(0) - d(t) - f(0)\, e^{-\frac{k_s}{k_d} d(t)} \right]}}$$

b) Innfør $d = \frac{k_d}{k_s} u$:

$$\frac{1}{k_s} \frac{d}{dt} u = f(0) + s(0) - \frac{k_d}{k_s} u - f(0)\, e^{-u}.$$

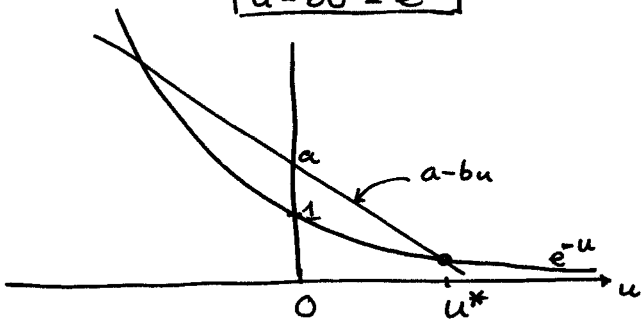
Divisjon med $f(0)$ og med $k_s f(0)\, t = \tau$ gir

$$\underline{\underline{\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u}}},$$

der $a = 1 + \frac{s(0)}{f(0)} \underline{\underline{> 1}}$ og $b = \frac{k_d}{k_s f(0)} \underline{\underline{> 0}}.$

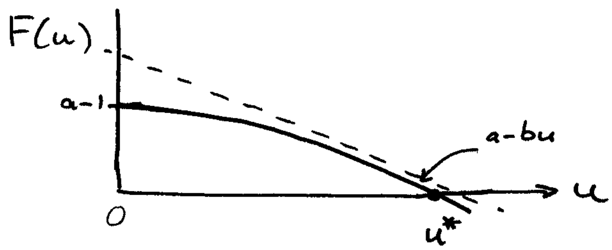
Fikspunkt der $\frac{du}{d\tau} = 0$ ⟹:

$$\boxed{a - bu = e^{-u}}$$



Den rette linje må skjære eksponentialfunksjonen i $\underline{\underline{2}}$ punkter, ett for $u>0$ og ett for $u<0$. Da u representerer et antall er den positive løsning den eneste relevante.

c) Funksjonen $F(u) = a - bu - e^{-u}$ ser slik ut:



En ser uten videre at $F(u) > 0$ for $0 \leq u < u^*$, og da $u(0) = 0$ må u øke med tida τ til verdien u^* nås. Mer formelt gir linearisering rundt u^*:

$$\frac{du}{d\tau} = F'(u^*)(u - u^*), \quad \text{eller}$$

$$\frac{d}{d\tau}(u - u^*) = F'(u^*)(u - u^*)$$

Da $F'(u^*) < 0$ er fikspunktet <u>tiltrekkende</u> [løsn. av linearisert likning : $u - u^* \propto e^{F'(u^*)\tau}$].

d) Dødsraten er

$$\dot{d} = \frac{k_d}{k_s}\dot{u} = k_d f(0)\frac{du}{d\tau} = k_d f(0)\left[a - bu - e^{-u}\right]$$

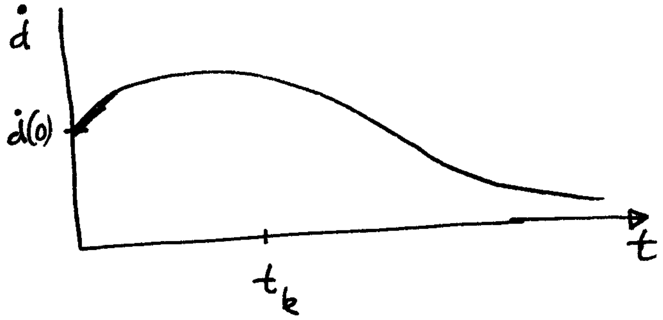
Ved $t=0$ er $u=0$ så

$$\dot{d}(t) - \dot{d}(0) = k_d f(0)\left[-bu - e^{-u} - 1\right]$$

For små u er $-bu - e^{-u} - 1 = -bu - (1 - u + \frac{u^2}{2} + \ldots) - 1 = (1-b)u + O(u^2)$

For $b<1$ er derfor $\underline{\underline{\dot{d}(t) - \dot{d}(0) > 0}}$ når starten

Og når $u \to u^*$ vil $\dot{d} \to 0$. Da må et kulminasjonspunkt eksistere



Oppgave 2

a) Sett $u(x,t) = \varphi(\underbrace{x-ct}_{\xi})$ i sine-Gordon:

$$(1-c^2)\varphi'' - \sin\varphi = 0.$$ Integrasjon gir

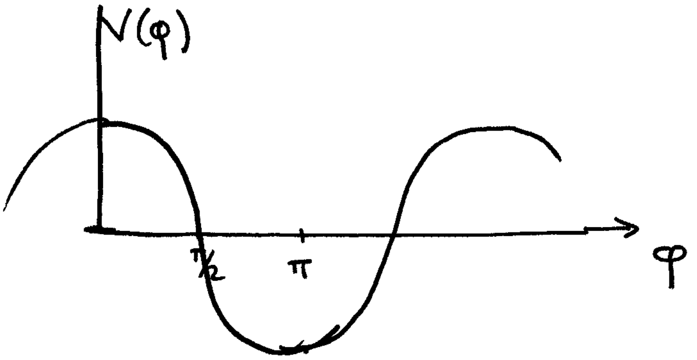
$$\frac{1-c^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + \cos\varphi = \text{konstant}.$$ Eller

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{1-c^2}\cos\varphi = \text{konstant}$$

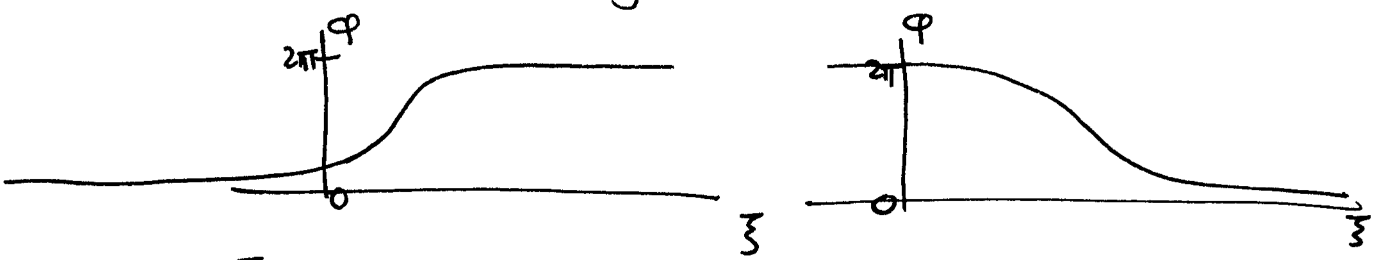
Dette er et mekanisk problem i potensialet $V(\varphi) = \frac{1}{1-c^2}\cos\varphi$ for partikkel med masse 1:

$$\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + V(\varphi) = E = \text{konstant}}$$

φ er partikkel posisjon, ξ = tid i dette éndimensjonale mekaniske problemet.



For solitære bølger må hastigheten → 0 ($\varphi \to$ konstant) for $\xi \to \pm\infty$. Bevegelser som svarer til dette er bevegelse fra ett potensialmaksimum til nabomaksimaet, enten mot høyre eller mot venstre:



Figuren viser $\varphi(\xi=-\infty) = 0 \to \varphi(\xi=+\infty) = 2\pi$, eller motsatt, men vi kan legge til hele multipler av 2π.

b) Bevegelseslikning for pendel nr n på stedet x

$$ml\,\ddot{\varphi}_n = k\,(\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} - 2\varphi_n) - mg\sin\varphi_n$$

eller

$$ml\,\ddot{\varphi}(x) = k\,[\varphi(x-\epsilon) + \varphi(x+\epsilon) - 2\varphi(x)] - mg\sin\varphi(x)$$

Antas $\varphi(x)$ variere langsomt med x kan vi utvikle i ϵ:

$$\varphi(x\pm\epsilon) = \varphi(x) \pm \epsilon\,\varphi_x(x) + \tfrac{1}{2}\epsilon^2\varphi_{xx}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

som gir innsatt

$$ml\,\ddot{\varphi} = k\epsilon^2\varphi_{xx} - mg\sin\varphi\,.$$

Etter skalering av tid og sted tar dette formen

$$\underline{\underline{\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - \sin\varphi}}\,,\quad \text{sine-Gordon.}$$

c) Vha $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ fås med $\left(\beta = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)$

$$\varphi = 4\tan^{-1} e^{\pm(x-x_0-ct)\beta}$$

$$\varphi_x = \frac{4}{1+e^{\pm 2\beta(x-x_0-ct)}}(\pm\beta)\, e^{\pm\beta(x-x_0-ct)} = \frac{\pm 2\beta}{\cosh[\beta(x-x_0-ct)]}$$

$$\varphi_t = -c\,\varphi_x$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\pm 2\beta^2}{\cosh^2[\beta(x-x_0-ct)]}\sinh[\beta(x-x_0-ct)]$$

$$\varphi_{tt} = c^2\varphi_{xx}$$

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt} = (1-c^2)\varphi_{xx} = \frac{1}{\beta^2}\varphi_{xx} = \underline{\frac{\pm 2\sinh[\beta(x-x_0-ct)]}{\cosh^2[\beta(x-x_0-ct)]}} \quad (***)$$

Dessuten

$$\sin\varphi = \sin(4\tfrac{\varphi}{4}) = 2\sin(2\tfrac{\varphi}{4})\cos(2\tfrac{\varphi}{4}) = 4\sin\tfrac{\varphi}{4}\cos\tfrac{\varphi}{4}\left(\cos^2\tfrac{\varphi}{4}-\sin^2\tfrac{\varphi}{4}\right)$$

$$= \frac{4\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}{\left(\sin^2\frac{\varphi}{4}+\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)^2} = \frac{4\tan\frac{\varphi}{4}\left(1-\tan^2\frac{\varphi}{4}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\varphi}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{4\, e^{\pm(x-x_0-ct)\beta}\left(1-e^{\pm 2(x-x_0-ct)\beta}\right)}{\left(1+e^{\pm 2(x-x_0-ct)\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{4\left(e^{\mp(x-x_0-ct)\beta} - e^{\pm(x-x_0-ct)\beta}\right)}{\left[e^{\mp(x-x_0-ct)\beta}+e^{\pm(x-x_0-ct)\beta}\right]^2}$$

$$= \frac{4\cdot \mp 2\sinh[(x-x_0-ct)\beta]}{\{2\cosh[(x-x_0-ct)\beta]\}^2} = \underline{\mp\frac{2\sinh[(x-x_0-ct)\beta]}{\cosh^2[(x-x_0-ct)\beta]}}$$

Dette er uttrykket (***) ovenfor. Altså tilfredsstilles sine-Gordon-likninga av denne ~~solitær~~-bølgeformen.

Oppgave 3

a) Som forel.

b) Fikspunkter $F(x) = x$

$$(a-1)x = x^3 \quad \text{gir tre løsninger}$$

$$x_0^* = 0 \qquad x_+^* = \sqrt{a-1} \quad \text{og} \quad x_-^* = -\sqrt{a-1}\ .$$

For $a<1$ eksister bare x_1^*, for $a>1$ ~~alle~~ tre i det reelle.

Stabilitet er bestemt ved $|F'(x^*)| < 1$.

$F'(x) = a - 3x^2$ gir

$$F'(x_0^*) = a \quad , \text{ så } x_0^* = 0 \text{ er stabil for } \underline{\underline{a<1.}}$$

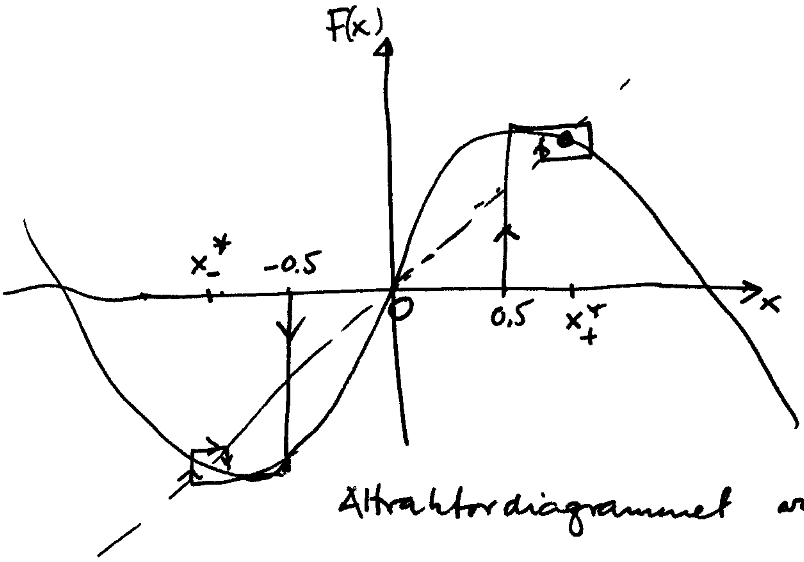
$$F'(x_\pm^*) = a - 3(a-1) = 3-2a \quad , \text{ som gir}$$

stabilitet for $\underline{\underline{1<a<2}}$

c) Punkt A må være der det stabile fikspunktet går over fra x_0^* til x_+^*, dvs $\underline{\underline{a_A = 1}}$, $\underline{\underline{x_A = 0}}$

Stabiliteten av fikspunktet slutter ved punkt B. Her er altså $\underline{\underline{a_B = 2}}$, $x_B = \sqrt{a_B - 1} = \underline{\underline{1}}$

Hadde vi startet med $x_1 = -0{,}5$ ville det stabile fikspunktet for $1<a<2$ vært x_-^*.
Det ser en av $F(x)$ som er en odde funksjon av x:



Attraktordiagrammet ville bli speilbildet $(x \to -x)$.

d) $$F(x_+) = a x_+ - x_+^3 = x_+(a - x_+^2) = x_+\left(a - \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)$$
$$= x_+\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right) = x_+ x_-^2 = x_-,$$ da

$x_+ x_- = 1$. Tilsvarende er $F(x_-) = x_+$ så $F^2(x_+) = x_+$, periode 2. Samme for negative $x_\pm$.

Stabilitet: $$F'(x_\pm) = a - 3x_\pm^2 = a - 3\left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)$$
$$= -\frac{a}{2} \mp 3\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$$

og $$F'(x_+)\,F'(x_-) = \frac{a^2}{4} - 9\left(\frac{a^2}{4}-1\right) = 9 - 2a^2$$

$$\left|\frac{d}{dx} F^2(x_\pm)\right| = \left|F'(x_+)\,F'(x_-)\right| = |9 - 2a^2|$$ ligger mellom

+1 og −1 for $2 < a < \sqrt{5}$. Så periode-2 banene er stabile i dette intervallet. På figuren er da $a_C = a_D = \sqrt{5}$, og

$$x_C = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}} \qquad x_D = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}$$

e) Som forelesningene

f) Der vi har en stabil periodisk bane er $\underline{\underline{\lambda \leq 0}}$.

For et fikspunkt er alle $F'(x_i)$ identiske, så

$$\lambda = \ln |F'(x^*)| = \ln |a - 3x^{*2}|$$

$\boxed{0<a<1}$ $\quad x^* = 0 \quad$ $\lambda = \underline{\underline{\ln a}}$

$\boxed{1<a<2}$ $\quad x^* = \pm\sqrt{a-1} \quad$ $\lambda = \underline{\underline{\ln|3-2a|}}$