EKSAMEN 9.MAI 1996
IKKELINEÆR DYNAMIKK
Løsningsforslag

Oppgave 1

Modelleringslikningene var

$$\frac{dx}{dt} = x\,(3 - x - 2y) \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = y\,(2 - x - y) \tag{2}$$

Det fysiske problem krever ikkenegative verdier for x og y.

a) Likevektspunkter fås ved å nullstille høyresidene i det dynamiske system:

$$x(3 - x - 2y) = 0 \tag{3}$$
$$y(2 - x - y) = 0. \tag{4}$$

Den første likningen har et nullpunkt i $x = 0$. Med denne verdien blir (4): $y(2 - y) = 0$, med løsninger $y = 0$ og $y = 2$.

Dersom $x \neq 0$ gir (3) $x = 3 - 2y$, som innsatt i (4) gir $y(y - 1) = 0$, med løsninger $y = 0$ og $y = 1$. De tilhørende x-verdier er $x = 3$ og $x = 1$.

De fire fikspunktene $F_n = (x^*, y^*)$ er derfor

$$\begin{aligned} F_1 &: \ (0,0) \\ F_2 &: \ (0,2) \\ F_3 &: \ (3,0) \\ F_4 &: \ (1,1) \end{aligned}$$

b) For å undersøke fikspunktenes stabilitet lineariserer vi bevegelseslikningene (1-2)rundt fikspunktene.

F_1: Nær origo er de lineariserte likningene

$$\dot{x} = 3x \text{ og } \dot{y} = 2y$$

med løsning:

$$x(t) = x(0)e^{3t} \text{ og } y(t) = y(0)e^{2t}. \tag{5}$$

Dette viser at origo er et ustabilt fikspunkt, et ustabilt fokus.

F_2: Med $\tilde{y} = y - y^* = y - 2$ blir de lineariserte likningene:

$$\dot{x} = -x \text{ og } \dot{\tilde{y}} = -2x - 2\tilde{y}.$$

Den første likningen har løsning

$$x(t) = x(0)e^{-t},$$

og den andre

$$\tilde{y}(t) = [\tilde{y}(0) + 2x(0)]e^{-2t} - 2x(0)e^{-t}.$$

Det viser at x og $\tilde{y}$ går mot null når t øker; fikspunktet er stabilt. En trengte ikke være så eksplisitt. Det enkleste er bare å sette inn $x \propto e^{st}$ og $\tilde{y} \propto e^{st}$ i likningene (1-2). Det gir to homogene lineære likninger

$$\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0$$

Systemdeterminanten lik null gir $s = -1$ eller $s = -2$, begge muligheter svarer til avvik fra fikspunktet som går mot null med økende t, dvs stabilitet.

F_3: Med $\tilde{x} = x - x^* = x - 3$ blir de lineariserte likningene:

$$\dot{\tilde{x}} = -3\tilde{x} - 6y \text{ og } \dot{y} = -y.$$

Innsetting av tidsavhengighet e^{st} gir i dette tilfellet

$$\begin{pmatrix} s+3 & 6 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$$

I dette tilfellet forsvinner systemdeterminenten for $s = -3$ og $s = -1$, så F_3 er også stabilt.

F_4: Med $\hat{x} = x - 1$ og $\hat{y} = y - 1$ blir de lineariserte likningene

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} - 2\hat{y} \text{ og } \dot{\hat{y}} = -\hat{x} - \hat{y}.$$

Med tidsavhengighet $\propto e^{st}$ fås likningssystemet

$$\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = 0.$$

I dette tilfellet forsvinner systemdeterminanten for $(s+1)^2 = 2$, dvs

$$s = -1 \pm \sqrt{2}.$$

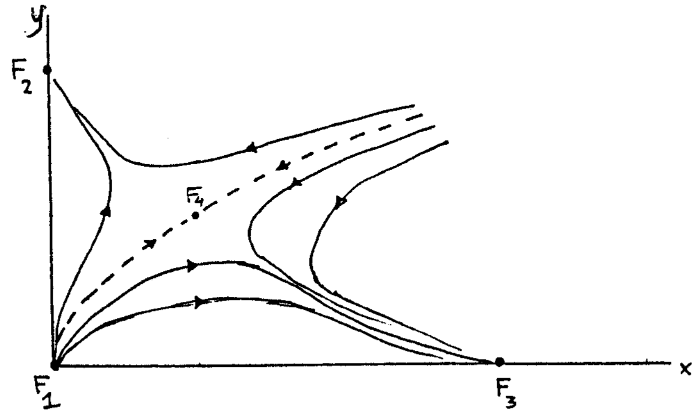
Den ene s-verdien er positiv, den andre negativ, så fikspunktet er et sadelpunkt. Et fasepunkt i nærheten strømmer alltid bort fra fikspunktet bortsett fra punkter på en kurve C gjennom fikspunktet.

c) For $y(0) = 0$ forblir etter likning (2) $y(t) = 0$, mens $\dot{x} = x(3 - x)$, negativt for $x > 3$ og positivt for $0 < x < 3$. På x-aksen strømmer derfor fasepunktet alltid mot fikspunktet $x^* = 3$.

For $x(0) = 0$ forblir $x(t) = 0$ pga likning (1), mens $\dot{y} = y(2-y)$. Dette viser at også langs den positive y-aksen strømmer fasepunkter mot fikspunktet, her $y^* = 2$.

For store x og y vil vi ha $\dot{x} < 0$ og $\dot{y} < 0$: Fasepunktene strømmer mot mindre verdier.

Hvordan skal vi få et sammenhengende faseportrett ut av dette? Alle fasepunkter vil altså havne i fikspunktene F_2 eller F_3, bortsett fra dem som ligger ligger på kurven C; disse havner i F_4. Kurven C må derfor være grensekurven (separatrisen) mellom nedslagsfeltene til de stabile fikspunktene F_2 og F_3, og faseportrettet må ha følgende topologi:



Kommentar: En kan lett få med endel detaljer i faseportrettet: (i) Banekurvene har ekstrema for $x+y=2$, og er vertikale for $x+2y=3$, (ii) Separatrisen har likningen $\widehat{y} = \widehat{x}/\sqrt{2}$ i nærheten av F_4, (iii) En ser av (5) at nær origo er $y =$ konstant $\cdot\, x^{\frac{2}{3}}$, og tilsvarende kan en finne detalj-forløpet nær de stabile fikspunktene F_2 og F_3.

Siden nesten enhver begynnelsestilstand havner i F_2 eller F_3 der en av artene er utdødd, må en si at modellen er i overensstemmelse med prinsippet om konkurranseutelukkelse.

Oppgave 2

a) La oss først vise at

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} u^n(x,t)\,dx = C_n = \text{ tidsuavhengig,}$$

for $n=1$ og $n=2$. Det følger enkelt ved å derivere med hensyn på t:

$$\frac{dI_n}{dt} = n\int u^{n-1}u_t\,dx = n\int u^{n-1}(6uu_x - u_{xxx})\,dx$$

For $n=1$ er dette $[3u^2 - u_{xx}]_{-\infty}^{\infty} = 0$ for en lokalisert puls. For $n=2$ er det

$$[2u^3 - uu_{xx} - \tfrac{1}{2}u_x^2]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Så tyngdepunktet:

$$\frac{dX_T}{dt} = C_1^{-1}\int xu_t\,dx = C_1^{-1}\int x(6uu_x - u_{xxx})\,dx = -C_1^{-1}\int(3u^2 - u_{xx})\,dx = -3C_2/C_1$$

ved en delvis integrasjon. Altså er tyngdepunktsfarten konstant.

b) Potensialene $u(x,0)$ og $u(x,t)$ har samme egenverdier.

Antall egenverdier i det assosierte Schrödingerproblemet er lik antall solitoner. En solitær bølge er ett soliton, og solitærbølgeprofilet tilsvarer derfor et refleksjonsløst potensial med 1 egenverdi. Potensialet ($m = 1$)

$$u(x) = \frac{-2\alpha^2}{\cosh^2[\alpha(x - \text{konstant})]}$$

er refleksjonsløst og har 1 egenverdi. (Konstanten tilsvarer bare valg av origo på x-aksen.) Sammenlikning med KdV-solitonet

$$u = \frac{A}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)]}$$

viser at $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{c}$, og derved

$$A = -2\alpha^2 = \underline{\underline{-\frac{c}{2}}}.$$

c) KdV-likningen beskriver overflatebølger med amplitude en god del mindre enn kanaldybden og utstrekning en god del større enn kanaldybden.

d) I den grunnere kanalen vil amplitude og bredde være dobbelt så store relativt til dybden i forhold til tidligere. Hvis den solitære bølgen hadde formen

$$u(x) = -\frac{c/2}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x\right)}$$

i dimensjonsløse koordinater, vil den ved $u \to u/2$ og $x \to x/2$ i den nye situasjon ha formen

$$u(x) = -2\frac{c/2}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x/2\right)}.$$

Med $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{c}$ er dette

$$u(x) = -\frac{16\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)}.$$

Da $16 = m(m+1)$ med $3 < m < 4$ vil dette potensialet ha 3 diskrete egenverdier, men vil ikke være refleksjonsløst. Det tilsvarende bølgeprofilet vil derfor i tidens løp utvikle seg til <u>tre atskilte solitoner</u> og i tillegg noe bakgrunnsstøy som beveger seg langsommere.

Oppgave 3

a) Lyapunoveksponenten λ er et mål for hvorledes avstanden mellom to nabopunkter (x_1 og $x_1 + \epsilon$) endrer seg under iterasjonen. Mer presist:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_{n+1}(x_1 + \epsilon) - x_{n+1}(x_1)}{\epsilon} \propto e^{n\lambda}$$

for store n. (Har tatt x_{n+1} for å få n iterasjoner.) D.v.s.

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_{n+1}(x_1)}{dx_1} \right| .$$

Med $x_{n+1} = F(x_n)$ er

$$\frac{dx_{n+1}(x_1)}{dx_1} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdots \frac{dx_1}{dx_0} = F'(x_n) F'(x_{n-1}) \cdots F'(x_0),$$

slik at

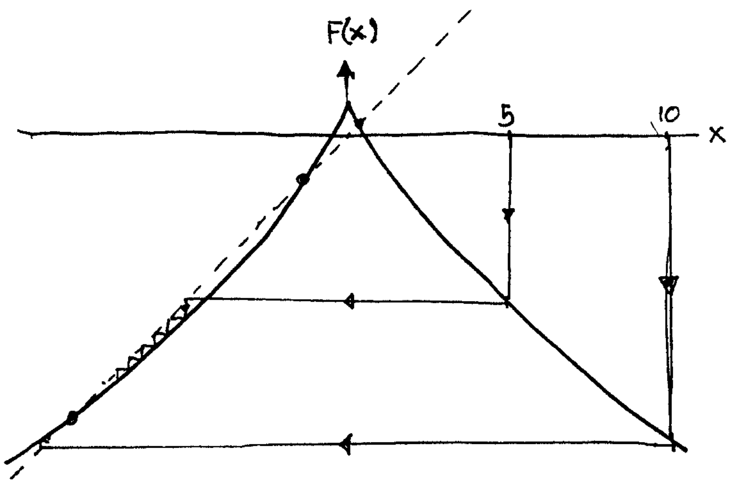
$$\underline{\underline{\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |F'(x_i)| .}}$$

b) Når $|x| \leq 1$ vil $-0.9 \leq F(x) \leq 1$, dvs $|F(x)| \leq 1$. Så bane a vil alltid holde seg i intervallet (-1,1). Her er den deriverte

$$F'(x) = \pm \frac{1.425}{|x|^{\frac{1}{4}}}$$

alltid større enn 1 i tallverdi. Lyapunov-eksponenten er derfor *positiv*, som tilsvarer kaotisk oppførsel.

Både bane b og bane c tiltrekkes til det stabile fikspunktet nær $x = -8$, det ses umiddelbart av en figur:



c) Av punkt b følger umiddelbart at for bane b og c er Lyapunoveksponenten *negativ*, mens den, som sagt ovenfor, er *positiv* for bane a.

For en bane som svinger seg inn til et stabilt fikspunkt er

$$\lambda = \ln |F'(x^*)|.$$

I vårt tilfelle er fikspunktet løsningen av

$$1 - 1.9|x^*|^{\frac{3}{4}} = x^*$$

i nærheten av -8. Ved hjelp av kalkulatoren finnes $x^* = -8.243617$, som innsatt i uttrykket for Lyapunoveksponenten gir

$$\lambda = \ln \frac{1.425}{8.243617^{\frac{1}{4}}} = \underline{\underline{-0.17319}}.$$

Oppgave 4

a) Dersom iterasjonen svinger seg inn til et forløp

$$F(\phi) = \phi + 1,$$

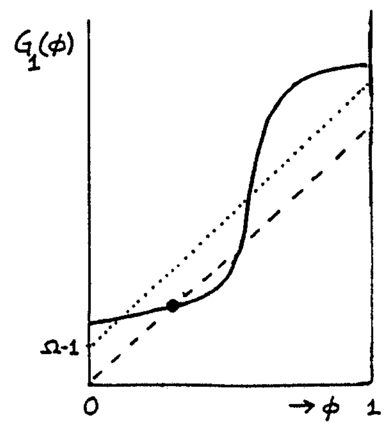
vil oscillatoren være synkronisert med påvirkningen. Ved innsetting for funksjonen $F(\phi)$ vil det si at

$$f(\phi) = (1 - \Omega)/k.$$

Det var oppgitt at maksimalverdien av $|f|$ var 1, og da f skifter fortegn når argumentet økes med $\frac{1}{2}$, må f variere mellom -1 og +1. Ovenstående likning kan da bare oppfylles for

$$1 - k \leq \Omega \leq 1 + k.$$

I dette intervallet har altså $G_1(\phi) = F(\phi) - 1$ fikspunkt.



Av figuren ser en lett at når $G_1(\phi)$ er en monotont økende funksjon vil et av fikspunktene til $G_1(\phi)$ være stabilt, slik at iterasjonen virkelig svinger seg inn til dette fikspunktet. Ovenstående intervall svarer til verdien

$$a = \underline{\underline{1}}.$$

b) Den itererte transformasjonen er

$$F(F(\phi)) = \phi + 2\Omega + kf(\phi) + kf\left(\phi + \Omega + kf(\phi)\right).$$

For små k kan vi utvikle siste ledd i potenser av k:

$$kf\left(\phi + \Omega + kf(\phi)\right) = kf(\phi + \Omega) + k^2 f(\phi) f'(\phi + \Omega) + \mathcal{O}(k^3).$$

Og når $\Omega = \frac{1}{2}$ pluss ledd av orden k^2 eller mindre får vi

$$F(F(\phi)) = \phi + 2\Omega + kf(\phi) + kf(\phi + \tfrac{1}{2}) + k^2 f(\phi) f'(\phi + \Omega) + \mathcal{O}(k^3).$$

Tilslutt gir innsetting av $f(\phi + \frac{1}{2}) = -f(\phi)$:

$$F(F(\phi)) = \phi + 2\Omega - k^2 f(\phi) f'(\phi) + \mathcal{O}(k^3),$$

som skulle vises.

For det spesielle tilfellet av $f(\phi) = \sin(2\pi\phi)$ blir dette til orden k^2:

$$F(F(\phi)) = \phi + 2\Omega - 2\pi k^2 \sin(2\pi\phi)\cos(2\pi\phi) = \phi + 2\Omega - \pi k^2 \sin(4\pi\phi).$$

Siste ledd varierer mellom $-\pi k^2$ og $+\pi k^2$. Vi ser at skal vi ha $F(F(\phi)) = \phi + 1$ må

$$|2\Omega - 1| \leq \pi k^2.$$

Og $G_2(\phi) = F(F(\phi)) - 1$ vil (på samme vis som G_1) ha fikspunkter, derav et tiltrekkende, dersom denne betingelsen er oppfylt. Dette intervallet for Ω tilsvarer

$$\tfrac{1}{2} - bk^2 \leq \Omega \leq \tfrac{1}{2} + bk^2$$

med

$$\underline{\underline{b = \tfrac{1}{2}\pi.}}$$