Eksamen i ikkelineær dynamikk, fag SIF 4088
Onsdag 29. november 2000
Løsninger

1a) a_1 er vekstraten til gjeddebestanden (relativ tilvekst pr. tid) dersom det er ubegrenset tilgang på ressurser og ikke noen konkurranse med andre arter.
Det negative bidraget $-b_1 A$ til vekstraten skyldes konkurranse fra abborbestanden, enten ved at de to artene konkurrerer i det samme matfatet, eller at abboren spiser gjedde (helst gjedderogn og gjeddeyngel).
Det negative bidraget $-c_1/(d_1 + A)$ beskriver den omstendigheten at abboren er mat for gjeddene. Jo mer abbor, jo mindre reduksjon i vekstraten for gjeddebestanden.
Dersom $f_1(0) > 0$, så betyr det at gjeddene kan overleve selv om det ikke finnes noe abbor igjen. Dersom $f_1(0) < 0$, betyr det det motsatte, at gjeddene ikke kan overleve uten å spise abbor.

1b) Vi skal vise at $\dot{F}_1 - \dot{F}_2 = 0$. Vi har at

$$\dot{F}_1 = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}A}\,\dot{A} = \left(\left(a_1 - \frac{c_1}{d_1}\right)\frac{1}{A} + \frac{c_1}{d_1}\,\frac{1}{d_1 + A} - b_1\right) A f_1(G) = f_2(A) f_1(G)\ .$$

På tilsvarende måte finner vi at $\dot{F}_2 = f_1(G) f_2(A)$, og dermed er oppgaven løst.
Generelt vil bevegelsesligningene $\dot{G} = G f_1(A)$, $\dot{A} = A f_2(G)$ alltid ha en bevegelseskonstant av formen $F_1(A) - F_2(G)$, vi skal bare velge $F_1(A)$ og $F_2(G)$ som løsninger av ligningene

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}A} = \frac{f_2(A)}{A}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}G} = \frac{f_1(G)}{G}\ .$$

1c) Start med å dividere begge ligningene med a_1. Det gir:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}}{a_1} &= G\left(1 - \frac{b_1}{a_1}\,A - \frac{c_1}{a_1(d_1 + A)}\right), \\ \frac{\dot{A}}{a_1} &= A\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{a_1}\,G - \frac{c_2}{a_1(d_2 + G)}\right). \end{aligned}$$

Definer så

$$\widetilde{t} = a_1 t\ , \qquad \widetilde{G} = \frac{b_2}{a_1}\,G\ , \qquad \widetilde{A} = \frac{b_1}{a_1}\,A\ .$$

Multipliser dessuten første ligning med b_2/a_1 og andre ligning med b_1/a_1.
Det gir ligningene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\widetilde{G}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} &= \widetilde{G}\left(1 - \widetilde{A} - \frac{b_1 c_1}{{a_1}^2\left(\frac{b_1 d_1}{a_1} + \widetilde{A}\right)}\right), \\ \frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}\widetilde{t}} &= \widetilde{A}\left(\frac{a_2}{a_1} - \widetilde{G} - \frac{b_2 c_2}{{a_1}^2\left(\frac{b_2 d_2}{a_1} + \widetilde{G}\right)}\right). \end{aligned}$$

Dette er ligninger av samme form som de opprinnelige, der vi nå har transformert konstantene som følger:

$$a_1 \mapsto 1 \;, \qquad b_1 \mapsto 1 \;, \qquad c_1 \mapsto \frac{b_1 c_1}{a_1^2} \;, \qquad d_1 \mapsto \frac{b_1 d_1}{a_1} \;,$$
$$a_2 \mapsto \frac{a_2}{a_1} \;, \qquad b_2 \mapsto 1 \;, \qquad c_2 \mapsto \frac{b_2 c_2}{a_1^2} \;, \qquad d_2 \mapsto \frac{b_2 d_2}{a_1} \;.$$

1d) Vi lineariserer bevegelsesligningene omkring fikspunktet i origo, $G = A = 0$, det gir ligningene

$$\begin{aligned} \dot{G} &= G f_1(0) = \left(a_1 - \frac{c_1}{d_1}\right) G = \left(1 - \frac{0,2}{0,15}\right) G = -\frac{1}{3}\, G \\ \dot{A} &= A f_2(0) = \left(a_2 - \frac{c_2}{d_2}\right) A = \left(2 - \frac{0,1}{0,2}\right) A = \frac{3}{2}\, A \end{aligned}$$

Det lineariserte problemet har en negativ egenverdi, $-1/3$, som svarer til en stabil retning ut fra fikspunktet, og en positiv egenverdi, $3/2$, som svarer til en ustabil retning. Det betyr at origo er et sadelpunkt.
Den stabile retningen ut fra fikspunktet er langs G-aksen, der $A = 0$. Siden bevegelsesligningene har en løsning der $A = 0$ hele tiden, mens G går eksponensielt mot null, er det den positive G-aksen som er den stabile mangfoldigheten til fikspunktet, på den ene siden av fikspunktet. Den motsatte retningen, mot negative verdier av G, er uinteressant her.
Den ustabile retningen er langs A-aksen, der $G = 0$, og den ustabile mangfoldigheten i postiv A-retning er hele den positive A-aksen.
For å finne alle fikspunktene må vi løse ligningssystemet $G f_1(A) = 0$, $A f_2(G) = 0$.
Det er tre tilfeller å vurdere, i tillegg til $G = A = 0$, nemlig:
1) $G = 0$, $f_2(G) = 0$, som er umulig.
2) $A = 0$, $f_1(A) = 0$, som også er umulig.
3) $f_1(A) = 0$, $f_2(G) = 0$.
Dersom

$$f_1(A) = 1 - A - \frac{0,2}{0,15 + A} = 0 \;,$$

så er $(1 - A)(0,15 + A) - 0,2 = 0$, dvs. at

$$A^2 - 0,85\, A + 0,05 = 0 \;.$$

Løsningene er $A = 0,425 \pm \sqrt{0,425^2 - 0,05} = 0,425 \pm 0,3614208\ldots$, altså $A_1 = 0,7864208\ldots$ og $A_2 = 0,0635892\ldots$.
Dersom

$$f_2(G) = 2 - G - \frac{0,1}{0,2 + G} = 0 \;,$$

så er $(2 - G)(0,2 + G) - 0,1 = 0$, dvs. at

$$G^2 - 1,8\, G - 0,3 = 0 \;.$$

Løsningene er $G = 0,9 \pm \sqrt{0,9^2 + 0,3} = 0,9 \pm 1,0535654\ldots$, og den eneste positive løsningen er $G_1 = 1,9535654\ldots$.

Det gir to fikspunkt med $G \geq 0$, $A \geq 0$, utenom $G = A = 0$, nemlig (G_1, A_1) og (G_1, A_2).
For å klassifisere dem trenger vi Jacobi-matrisen $\mathcal{J}$, med de partiellderiverte av hastighetsfeltet som matriseelementer,

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial G} & \frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial A} \\ \frac{\partial(Af_2(G))}{\partial G} & \frac{\partial(Af_2(G))}{\partial A} \end{pmatrix} .$$

Vi trenger den i fikspunktene der $f_1(A) = f_2(G) = 0$, og vi har at

$$\frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial G} = f_1(A) = 0 ,$$

$$\frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial A} = Gf_1'(A) = G\left(-1 + \frac{0,2}{(0,15 + A)^2}\right) ,$$

$$\frac{\partial(Af_2(G))}{\partial G} = Af_2'(G) = A\left(-1 + \frac{0,1}{(0,2 + G)^2}\right) ,$$

$$\frac{\partial(Af_2(G))}{\partial A} = f_2(G) = 0 .$$

En egenverdi λ til matrisen $\mathcal{J}$ i ett av disse fikspunktene må oppfylle egenverdiligningen

$$\lambda^2 - \frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial A}\,\frac{\partial(Af_2(G))}{\partial G} = 0 .$$

Egenverdiene kommer derfor parvis, slik at når en løsning av egenverdiligningen er λ_1, så er $\lambda_2 = -\lambda_1$ den andre løsningen.
I begge fikspunktene (G_1, A_1) og (G_1, A_2) gjelder at

$$\frac{\partial(Af_2(G))}{\partial G} = A\left(-1 + \frac{0,1}{(0,2 + G_1)^2}\right) = A\left(-1 + \frac{0,1}{(0,2 + 1,95\ldots)^2}\right) < 0 .$$

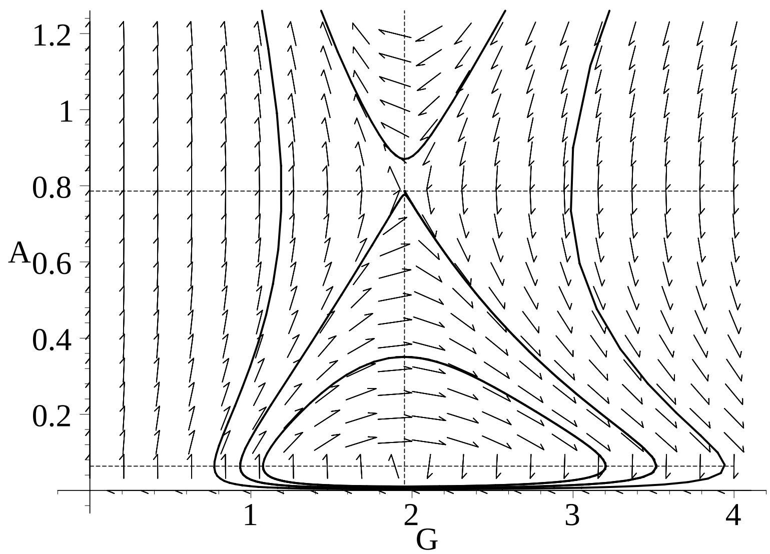
I fikspunktet (G_1, A_1) gjelder at

$$\frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial A} = G_1\left(-1 + \frac{0,2}{(0,15 + A_1)^2}\right) = G_1\left(-1 + \frac{0,2}{(0,15 + 0,79\ldots)^2}\right) < 0 .$$

Egenverdiligningen der gir altså at $\lambda^2 > 0$, slik at det finnes en positiv og en negativ egenverdi. Dette fikspunktet er derfor et sadelpunkt, med en ustabil og en stabil retning.
I fikspunktet (G_1, A_2) gjelder at

$$\frac{\partial(Gf_1(A))}{\partial A} = G_1\left(-1 + \frac{0,2}{(0,15 + A_1)^2}\right) = G_1\left(-1 + \frac{0,2}{(0,15 + 0,06\ldots)^2}\right) > 0 .$$

Egenverdiligningen der gir at $\lambda^2 < 0$, og det betyr at begge egenverdiene er rent imaginære. Dette fikspunktet kan derfor være et senter, men vi trenger mer enn lineær stabilitetsanalyse for å fastslå sikkert om det er et senter eller ikke.
At det faktisk er et senter, følger av det vi vet fra punkt 1b), at det finnes en ikketriviell bevegelseskonstant. Dersom bevegelsen starter nær fikspunktet, må den følge en lukket bane, gitt ved en bestemt verdi av bevegelseskonstanten.



Figur 1: Faseportrett med fire "typiske" baner.

1e) Figuren viser et faseportrett i området $G \geq 0$, $A \geq 0$, med fire "typiske" baner tegnet inn, og med retninger av hastighetsfeltet indikert.

De strekete linjene i figuren er nullkliner: $\dot{A} = 0$ langs den vertikale linjen $G = G_1 \approx 1,95$, mens $\dot{G} = 0$ langs de horisontale linjene $A = A_1 \approx 0,79$ og $A = A_2 \approx 0,06$.
De to skjæringspunktene mellom nullklinene er fikspunkter: det øverste, (G_1, A_1), er et sadelpunkt og det nederste, (G_1, A_2), er et senter.
Av de to lukkete banene som er vist, er den innerste periodisk, mens den ytterste er en homoklin, som konvergerer mot sadelpunktet (G_1, A_1) i begge grensene $t \to \pm\infty$. Begge de to andre banene er ubegrensete, og for dem gjelder at $G \to \infty$ og $A \to \infty$ når $t \to -\infty$, mens $G \to 0$ og $A \to \infty$ når $t \to +\infty$.
Vi ser at dersom bestandene av gjedde og abbor starter "nær nok" fikspunktet (G_1, A_2), så vil de oscillere periodisk. Grensetilfellet for oscillasjoner er den homokline banen som er samtidig ustabil og stabil mangfoldighet til fikspunktet (G_1, A_1). Denne er en lukket kurve i planet. Enhver bane som starter innenfor den lukkete kurven, holder seg innenfor og er periodisk, mens enhver bane som starter utenfor, holder seg utenfor og er ubegrenset.
I det siste tilfellet er det bare ett mulig utfall i det lange løp, nemlig at gjeddene dør ut, mens bestanden av abbor vokser over alle grenser (vi har jo ikke tatt hensyn til i modellen at det finnes grenser for veksten). Denne konklusjonen er kanskje litt uventet, at hvis f.eks. gjeddebestanden er for stor på et tidspunkt, så er gjeddene dømt til undergang, uansett hvor mye eller lite abbor det finnes.
Bestandene kan ikke variere kaotisk, uansett parameterverdier, fordi systemet er todimensjonalt, og kaos kan forekomme i et autonomt system bare dersom dimensjonen er tre eller større.

1f) En grensesyklus er en periodisk bane (løsning av bevegelsesligningen) som er *isolert*, dvs. at enhver bane som starter i nærheten, ikke er periodisk, men enten konvergerer mot grensesyklen eller fjerner seg fra den.

Det finnes et kontinuum av periodiske baner i faseportrettet ovenfor, men fordi de ikke er isolerte, er de ikke grensesykler.
En nullklin i et todimensjonalt system er en kurve gjennom punkter der den ene hastighetskomponenten er null. Et fikspunkt i to dimensjoner er altså et skjæringspunkt mellom to nullkliner.
En homoklin er en løsning av bevegelsesligningen som konvergerer mot ett og samme fikspunkt når $t \to -\infty$ og når $t \to +\infty$. Den starter altså ut fra fikspunktet ved $t \to -\infty$ i en retning som er en ustabil retning, og nærmer seg fikspunktet ved $\to +\infty$ i en annen retning, som er en stabil retning. Fikspunktet må altså være et sadelpunkt.
For sadelpunktet (G_1, A_1) ovenfor har vi et eksempel på en homoklin. Beviset for at denne kurven virkelig starter fra sadelpunktet og ender opp i det samme punktet, er at det finnes en bevegelseskonstant, og bevegelsen er nødt til å følge en kurve der denne størrelsen er konstant. Derfor treffer den det samme punktet som den starter ut fra.
En heteroklin er omtrent det samme som en homoklin, forskjellen er at den starter i ett fikspunkt (som kan være et sadelpunkt eller et ustabilt fikspunkt) og ender i et annet (som kan være et sadelpunkt eller et stabilt fikspunkt).
Det finnes ingen heteroklin i faseportrettet ovenfor.

2a) Med notasjonen i oppgaveteksten har vi at $U(X,T) = \alpha + \beta u(x,t)$, og dermed

$$\begin{aligned} U_T &= \beta\, u_x \frac{\partial x}{\partial T} + \beta\, u_t \frac{\partial t}{\partial T} = \beta\delta\, u_x + \beta\epsilon\, u_t \ , \\ U_X &= \beta\, u_x \frac{\partial x}{\partial X} + \beta\, u_t \frac{\partial t}{\partial X} = \beta\gamma\, u_x \ , \\ U_{XXX} &= \beta\gamma^3\, u_{xxx} \ . \end{aligned}$$

Det gir at

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = \beta\delta\, u_x + \beta\epsilon\, u_t - 6\beta\gamma(\alpha + \beta u)u_x + \beta\gamma^3\, u_{xxx} \ .$$

Vi krever nå at $\delta = 6\gamma\alpha$ og at $\epsilon = \gamma\beta = \gamma^3$, eller ekvivalent at

$$\alpha = \frac{\delta}{6\gamma} \ , \qquad \beta = \gamma^2 \ , \qquad \epsilon = \gamma^3 \ ,$$

fordi vi dermed oppnår at

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = \gamma^5(u_t - 6uu_x + u_{xxx}) \ .$$

Da følger det at KdV-ligningen $U_T - 6UU_X + U_{XXX} = 0$ er oppfylt hvis og bare hvis KdV-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ er oppfylt.

2b) Ansatsen $u(x,t) = \phi(x - ct)$ i KdV-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ gir ligningen

$$-c\,\phi'(x-ct) - 6\,\phi(x-ct)\,\phi'(x-ct) + \phi'''(x-ct) = 0 \ ,$$

der $\phi'(x) = \mathrm{d}\phi(x)/\mathrm{d}x$. Eller i mer kortfattet notasjon,

$$-c\phi' - 6\phi\phi' + \phi''' = 0 \ .$$

Ligningen kan integreres en gang og gir at

$$-c\phi - 3\phi^2 + \phi'' = D \ , \tag{1}$$

der D er en integrasjonskonstant. Vi kan multiplisere denne ligningen med ϕ' og integrere en gang til, det gir at

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 + \frac{1}{2}\,(\phi')^2 = D\phi + E\ , \tag{2}$$

der E er enda en integrasjonskonstant.
De løsningene vi er interesserte i, er slik at $\phi'(x) \to 0$ og $\phi''(x) \to 0$ i begge grensene $x \to \pm\infty$. Det følger da at grenseverdiene ϕ_+ og ϕ_- må oppfylle ligningene

$$-c\phi - 3\phi^2 = D\ ,$$

og

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 = D\phi + E\ .$$

Den første av disse to ligningene gir at

$$\begin{aligned}\phi^2 &= -\frac{c}{3}\,\phi - \frac{1}{3}\,D\ ,\\ \phi^3 &= -\frac{c}{3}\,\phi^2 - \frac{1}{3}\,D\phi = \frac{c^2-3D}{9}\,\phi + \frac{c}{9}\,D\ .\end{aligned}$$

Innsatt i den andre ligningen gir det at

$$\frac{c^2}{6}\,\phi + \frac{c}{6}\,D - \frac{c^2-3D}{9}\,\phi - \frac{c}{9}\,D = D\phi + E\ .$$

Eller med litt omforming,

$$\frac{c^2-12D}{18}\,\phi = -\frac{c}{18}\,D + E\ .$$

Denne ligningen viser at grenseverdiene $\phi_\pm$ er *entydig* gitt ved integrasjonskonstantene D og E. Det er tilsynelatende ett unntak, der grenseverdiene ikke er entydige, og det er når $D = c^2/12$. Men denne verdien av D er nettopp den verdien der ligningen $-c\phi - 3\phi^2 = D$ for ϕ har en entydig løsning, idet de to løsningene av annengradsligningen blir like.
Konklusjon: integrasjonskonstantene D og E gir alltid begge grenseverdiene $\phi_\pm$ entydig. Derfor må $\phi_+ = \phi_-$.
Dersom grenseverdien $\phi_+ = \phi_-$ ikke er lik null, kan vi alltid transformere den til å bli null ved en transformasjon som gitt under punkt a) ovenfor. Vi velger da f.eks. $\gamma = 1$ og $\delta = -6\phi_+$.

2c) Anta at $u(x,t) = \phi(x - ct)$ er en solitonløsning av KdV-ligningen, med $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$. Den beveger seg med hastighet c. Transformer den som under punkt a), med $\delta = 0$ slik at grenseverdiene i uendelig bevares. Det gir en transformert løsning av KdV-ligningen som er

$$U(X,T) = \beta\,u(x,t) = \beta\,u(\gamma X, \epsilon T) = \beta\,\phi(\gamma X - c\epsilon T) = \gamma^2\phi(\gamma(X - c\gamma^2 T))\ .$$

Eller, dersom vi kaller X for x og T for t,

$$U(x,t) = \gamma^2\phi(\gamma(x - c\gamma^2 t))\ .$$

Dette er da en solitonløsning av KdV-ligningen som beveger seg med hastighet $c\gamma^2$, som har en høyde (amplitude) lik den opprinnelige høyden (amplituden) multiplisert med γ^2, og en bredde (bølgelengde) lik den opprinnelige bredden (bølgelengden) dividert med γ.

Konklusjon: høyden av et KdV-soliton er proporsjonal med hastigheten c, mens bredden er omvendt proporsjonal med $\sqrt{c}$.

Disse sammenhengene kan forøvrig leses ut av ligningene (1) og (2). Når $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$, så må $D = E = 0$. Der hvor funksjonen $\phi(x)$ har sin ekstremalverdi ϕ_{e}, enten et maksimum eller et minimum, må $\phi' = 0$, og ligning (2) gir da at

$$-\frac{c}{2}\,{\phi_{\mathrm{e}}}^2 - {\phi_{\mathrm{e}}}^3 = 0 \ .$$

Hvis ekstremalverdien ikke er null, slik at solitonet er helt fraværende, så må den være

$$\phi_{\mathrm{e}} = -\frac{c}{2} \ .$$

I ekstremalpunktet er da, i følge ligning (1),

$$-c\phi_{\mathrm{e}} - 3{\phi_{\mathrm{e}}}^2 + \phi'' = 0 \ ,$$

som gir at

$$\phi'' = c\phi_{\mathrm{e}} + 3{\phi_{\mathrm{e}}}^2 = \frac{c^2}{4} \ .$$

Hvis vi sammenligner to funksjoner $f(x)$ og $g(x) = af(bx)$, der a og b er konstanter, så har vi at $g''(x) = ab^2 f''(bx)$. Høyden av g er a ganger høyden av f, mens bredden av g er $1/b$ ganger bredden av f. Av de to opplysningene at ϕ_{e} er proporsjonal med c og at ϕ'' i ekstremalpunktet er proporsjonal med c^2, kan vi derfor trekke samme konklusjon som før, nemlig at bredden av et KdV-soliton er omvendt proporsjonal med $\sqrt{c}$.

2d) Egenverdiligningen for operatoren L er

$$L\psi = \lambda\psi \ ,$$

der $\psi = \psi(x,t)$, og der $\lambda = \lambda(t)$ er en egenverdi, som i prinsippet kan variere med tiden t. Det følger av KdV-ligningen, skrevet på formen $u_t + [L,A] = 0$, at dersom tidsavhengigheten til Schrödinger-bølgefunksjonen ψ er gitt av ligningen

$$\psi_t = A\psi \ ,$$

så er egenverdien λ uavhengig av t. For å bevise det, tidsderiverer vi egenverdiligningen, det gir:

$$u_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t \ ,$$

eller:

$$\lambda_t\psi = u_t\psi + L\psi_t - \lambda\psi_t = u_t\psi + LA\psi - \lambda A\psi = (u_t + LA - AL)\psi = 0 \ .$$

Siden ψ er en egenfunksjon for L, er den pr. definisjon ikke identisk lik null, og derfor følger det at $\lambda_t = 0$.

2e) Vi skal vise at $\dot{N} = 0$. Utregningen er ganske rett fram:

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi\,\psi_t = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi\,(A\psi) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi\,(-4\psi_{xxx} + 6u\,\psi_x + 3u_x\,\psi) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ (-8\psi\,\psi_{xxx} + 6u\,\psi\,\psi_x + 3u_x\,\psi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ (-8\psi\,\psi_{xx} + 4(\psi_x)^2 + 3u\,\psi^2)_x \\
&= (-8\psi\,\psi_{xx} + 4(\psi_x)^2 + 3u\,\psi^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

De forutsetningene vi gjør, er at funksjonene u og ψ, og alle aktuelle deriverte av dem, går mot null "tilstrekkelig raskt" i begge grensene $x \to \pm\infty$.
At normeringsintegralet er tidsuavhengig, har betydning når vi bruker invers-spredning-metoden til å beregne tidsutviklingen av funksjonen $u(x,t)$, i følge KdV-ligningen, gitt startprofilen $u(x,0)$. Da bruker vi nemlig ligningen $\psi_t = A\psi$ til å finne tidsutviklingen av koeffisienten $a_\kappa(t)$, definert ved at $\psi(x,t) \to a_\kappa(t)\,\mathrm{e}^{-\kappa x}$ når $x \to \infty$, for en bundet tilstand ψ med egenverdi $\lambda = -\kappa^2$. Det er en viktig forutsetning i denne definisjonen at ψ til enhver tid er normert slik at $N = 1$.