Eksamen i ikkelineær dynamikk, fag SIF 4088
Onsdag 31. juli 2002
Løsninger

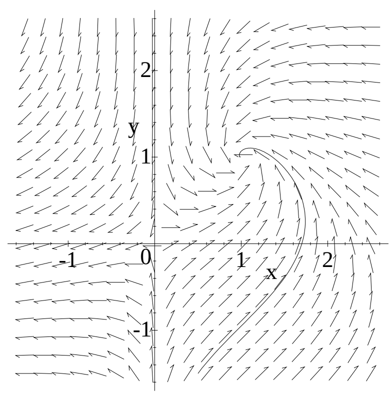
1a) i) $\dot{x} = x(2 - x - y)$, $\dot{y} = x - y$.

Hvis vi setter inn $x = 0$, $y = 0$, gir det at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Altså er origo et fikspunkt. Stabiliteten er gitt av egenverdiene til Jacobi-matrisen i origo,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Denne matrisen er triangulær, dvs. at den har bare nuller på den ene siden av diagonalen, og da er det egenverdiene som står på diagonalen. Egenverdiene er 2 og -1, den ene positiv og den andre negativ, og det viser at origo er et sadelpunkt.

Figur 1 viser et faseportrett, med eksempel på en bane, og med retninger av hastighetsfeltet indikert. Figuren avslører et stabilt fikspunkt i $x = y = 1$.



Figur 1: Faseportrett med eksempel på en bane.

ii) $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$.

$x = 0$, $y = 0$ gir at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Igjen er origo et fikspunkt. Stabiliteten er gitt av egenverdiene til Jacobi-matrisen i origo,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2\mathrm{e}^{-2x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

En egenverdi λ er rot i den karakteristiske ligningen, der I er enhetsmatrisen,

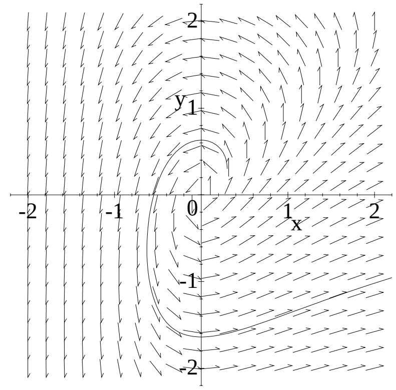
$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 .$$

Løsningene er

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7} \right) .$$

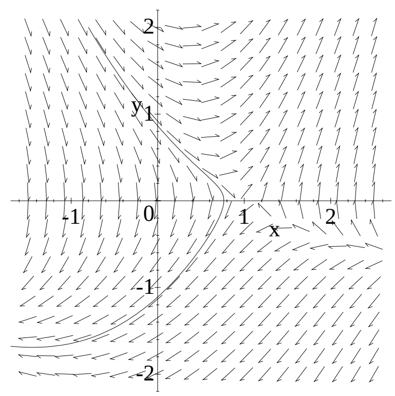
To komplekse egenverdier med positiv realdel er kjennetegnet på et ustabilt fikspunkt, nærmere bestemt en ustabil spiral (et ustabilt fokus).

Figur 2 viser et faseportrett.



Figur 2: Faseportrett med eksempel på en bane.

iii) $\dot{x} = y, \ \ \dot{y} = x(1+y) - 1$.
$x = 0$, $y = 0$ gir at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -1$. Da er origo ikke et fikspunkt.
Figur 3 viser et faseportrett, og vi ser av figuren at $x = 1$, $y = 0$ er et sadelpunkt.



Figur 3: Faseportrett med eksempel på en bane.

1b) Gitt bevegelsesligningene $\dot{x} = f(x,y), \ \ \dot{y} = g(x,y)$, der f og g er vilkårlige funksjoner (helst ikke mer vilkårlige enn at de er kontinuerlig deriverbare, dvs. har kontinuerlige deriverte).
At indeksen til en lukket kurve er $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, betyr pr. definisjon at når vi går rundt kurven en gang i positiv omløpsretning (mot urviseren), så roterer vektorfeltet $(f(x,y), g(x,y))$ en vinkel $2n\pi$. En negativ indeks betyr rotasjon i negativ omløpsretning. Det forutsettes at ikke noe punkt på kurven er et fikspunkt, for i så fall ville indeksen ikke være veldefinert.
Indeksen til et fikspunkt er indeksen til en *liten* lukket kurve som går rundt fikspunktet. At kurven er "liten" betyr spesielt at den ikke går rundt mer enn ett fikspunkt.
Indeksen til origo er -1 i eksempel i) i oppgave 2a), $+1$ i eksempel ii) og 0 i eksempel iii). Det kan vi f.eks. se av de tre figurene ovenfor. De tre eksemplene illustrerer den generelle regelen at indeksen er -1 for sadelpunkt, $+1$ for alle andre typer fikspunkt, og 0 for alle punkt som ikke er fikspunkt.

1c) Indeksen til enhetssirkelen er -2, og det betyr at innenfor enhetssirkelen ligger det minst to sadelpunkt. Mer presist: hvis m er antallet sadelpunkt innenfor sirkelen, så må $m \geq 2$, og antallet av andre typer fikspunkt innenfor sirkelen er $m-2$.

2a) Definisjonen $\phi = \Omega t - \theta$ gir at

$$\dot{\phi} = \Omega - \dot{\theta} = \Omega - \omega - K\sin(\Omega t - \theta) = \Omega - \omega - K\sin\phi \ .$$

Divider denne ligningen med K og definer $\tau = Kt$, da blir

$$\phi' = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\Omega - \omega}{K} - \sin\phi = \mu - \sin\phi \ ,$$

når vi definerer

$$\mu = \frac{\Omega - \omega}{K} \ .$$

2b) Fikspunkt har vi for alle verdier av ϕ som er løsninger av ligningen

$$\sin\phi = \mu \ .$$

Fikspunktet er stabilt dersom

$$\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\phi} = -\cos\phi < 0 \ ,$$

og ustabilt dersom

$$\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\phi} = -\cos\phi > 0 \ .$$

Dersom $|\mu| < 1$ finnes det to fikspunkt, et stabilt og et ustabilt (vi skiller ikke mellom løsninger dersom differensen mellom dem er et heltallig multiplum av 2π).
Dersom $|\mu| = 1$ finnes det ett fikspunkt, som er marginalt stabilt: det har

$$\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\phi} = -\cos\phi = 0 \ .$$

Det er stabilt fra den ene siden og ustabilt fra den andre siden.
Dersom $|\mu| > 1$ finnes det ingen fikspunkt.
Et stabilt fikspunkt sies å representere faselåsing fordi det hele tiden er en konstant faseforskjell mellom drivkraften og oscillatoren som drives.
Grensene for faselåsing er $|\mu| = 1$, dvs. $|\Omega - \omega| = K$. Altså er $\omega_1 = K$ i følge denne modellen.

2c) Når fasen ϕ øker fra ϕ_a til $\phi_b = \phi_a + 2\pi$, så tar det et skalert tidsintervall $\tau_b - \tau_a$ som er

$$\tau_b - \tau_a = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \mathrm{d}\phi \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\phi} = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mu - \sin\phi} \ .$$

Et standard knep for å løse denne typen integral er å innføre en ny variabel $x = \tan(\phi/2)$, det gir at

$$\sin\phi = 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2) = 2\tan(\phi/2)\cos^2(\phi/2) = \frac{2x}{1+x^2} \ ,$$

og at

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\phi}{2\cos^2(\phi/2)} = \frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}\phi}{2} \ .$$

Følgelig er

$$\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\mu - \sin\phi} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mu(1+x^2) - 2x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mu\left(1 - \frac{1}{\mu^2} + \left(x - \frac{1}{\mu}\right)^2\right)} = \int \frac{2\mu\,\mathrm{d}x}{\mu^2 - 1 + (\mu x - 1)^2} \ .$$

Innfør en ny variabel

$$y = \frac{\mu x - 1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \ ,$$

det gir at

$$\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\mu - \sin\phi} = \frac{2}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{2}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \arctan y \ .$$

Så var det integrasjonsgrensene. Vi kan velge å integrere fra $\phi_a = -\pi$ til $\phi_b = \phi_a + 2\pi = \pi$, det svarer til at $x_a = -\infty$, $y_a = -\infty$, $x_b = \infty$ og $y_b = \infty$. Det gir til slutt at

$$\tau_b - \tau_a = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mu - \sin\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \ .$$

En faseforskyvning på 2π tar derfor en tid som er

$$T = t_b - t_a = \frac{\tau_b - \tau_a}{K} = \frac{2\pi}{K\sqrt{\mu^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - K^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - \omega_1^2}} \ .$$

Sett $\Omega = \omega + \omega_1 + \delta$, med $\delta > 0$. Da er

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - \omega_1^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_1 + \delta)^2 - \omega_1^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2\omega_1 + \delta)\delta}} \ .$$

Dette er skaleringsloven: når $\delta \to 0$, så vil $T \to \infty$ som $1/\sqrt{\delta}$.

3a) Med notasjonen i oppgaveteksten har vi at $U(X,T) = \alpha + \beta u(x,t)$, og dermed

$$\begin{aligned} U_T &= \beta\, u_x \frac{\partial x}{\partial T} + \beta\, u_t \frac{\partial t}{\partial T} = \beta\delta\, u_x + \beta\epsilon\, u_t \ , \\ U_X &= \beta\, u_x \frac{\partial x}{\partial X} + \beta\, u_t \frac{\partial t}{\partial X} = \beta\gamma\, u_x \ , \\ U_{XXX} &= \beta\gamma^3\, u_{xxx} \ . \end{aligned}$$

Det gir at

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = \beta\delta\, u_x + \beta\epsilon\, u_t - 6\beta\gamma(\alpha + \beta u)u_x + \beta\gamma^3\, u_{xxx} \ .$$

Vi krever nå at $\delta = 6\gamma\alpha$ og at $\epsilon = \gamma\beta = \gamma^3$, eller ekvivalent at

$$\alpha = \frac{\delta}{6\gamma} \ , \qquad \beta = \gamma^2 \ , \qquad \epsilon = \gamma^3 \ ,$$

fordi vi dermed oppnår at

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = \gamma^5(u_t - 6uu_x + u_{xxx}) \ .$$

Da følger det at KdV-ligningen $U_T - 6UU_X + U_{XXX} = 0$ er oppfylt hvis og bare hvis KdV-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ er oppfylt.

3b) Ansatsen $u(x,t) = \phi(x - ct)$ i KdV-ligningen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ gir ligningen

$$-c\,\phi'(x - ct) - 6\,\phi(x - ct)\,\phi'(x - ct) + \phi'''(x - ct) = 0 \ ,$$

der $\phi'(x) = \mathrm{d}\phi(x)/\mathrm{d}x$. Eller i mer kortfattet notasjon,

$$-c\phi' - 6\phi\phi' + \phi''' = 0 \ .$$

Ligningen kan integreres en gang og gir at

$$-c\phi - 3\phi^2 + \phi'' = D \ , \tag{1}$$

der D er en integrasjonskonstant. Vi kan multiplisere denne ligningen med ϕ' og integrere en gang til, det gir at

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 + \frac{1}{2}\,(\phi')^2 = D\phi + E \ , \tag{2}$$

der E er enda en integrasjonskonstant.
De løsningene vi er interesserte i, er slik at $\phi'(x) \to 0$ og $\phi''(x) \to 0$ i begge grensene $x \to \pm\infty$. Det følger da at grenseverdiene ϕ_+ og ϕ_- må oppfylle ligningene

$$-c\phi - 3\phi^2 = D \ ,$$

og

$$-\frac{c}{2}\,\phi^2 - \phi^3 = D\phi + E \ .$$

Den første av disse to ligningene gir at

$$\begin{aligned} \phi^2 &= -\frac{c}{3}\,\phi - \frac{1}{3}\,D \ , \\ \phi^3 &= -\frac{c}{3}\,\phi^2 - \frac{1}{3}\,D\phi = \frac{c^2 - 3D}{9}\,\phi + \frac{c}{9}\,D \ . \end{aligned}$$

Innsatt i den andre ligningen gir det at

$$\frac{c^2}{6}\,\phi + \frac{c}{6}\,D - \frac{c^2 - 3D}{9}\,\phi - \frac{c}{9}\,D = D\phi + E \ .$$

Eller med litt omforming,

$$\frac{c^2 - 12D}{18}\,\phi = -\frac{c}{18}\,D + E \ .$$

Denne ligningen viser at grenseverdiene $\phi_\pm$ er *entydig* gitt ved integrasjonskonstantene D og E. Det er tilsynelatende ett unntak, der grenseverdiene ikke er entydige, og det er når $D = c^2/12$. Men denne verdien av D er nettopp den verdien der ligningen $-c\phi - 3\phi^2 = D$

for ϕ har en entydig løsning, idet de to løsningene av annengradsligningen blir like.
Konklusjon: integrasjonskonstantene D og E gir alltid begge grenseverdiene $\phi_\pm$ entydig. Derfor må $\phi_+ = \phi_-$.
Dersom grenseverdien $\phi_+ = \phi_-$ ikke er lik null, kan vi alltid transformere den til å bli null ved en transformasjon som gitt under punkt a) ovenfor. Vi velger da f.eks. $\gamma = 1$ og $\delta = -6\phi_+$.

3c) Anta at $u(x,t) = \phi(x-ct)$ er en solitonløsning av KdV-ligningen, med $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$. Den beveger seg med hastighet c. Transformer den som under punkt a), med $\delta = 0$ slik at grenseverdiene i uendelig bevares. Det gir en transformert løsning av KdV-ligningen som er

$$U(X,T) = \beta\, u(x,t) = \beta\, u(\gamma X, \epsilon T) = \beta\, \phi(\gamma X - c\epsilon T) = \gamma^2 \phi(\gamma(X - c\gamma^2 T)) \ .$$

Eller, dersom vi kaller X for x og T for t,

$$U(x,t) = \gamma^2 \phi(\gamma(x - c\gamma^2 t)) \ .$$

Dette er da en solitonløsning av KdV-ligningen som beveger seg med hastighet $c\gamma^2$, som har en høyde (amplitude) lik den opprinnelige høyden (amplituden) multiplisert med γ^2, og en bredde (bølgelengde) lik den opprinnelige bredden (bølgelengden) dividert med γ.
Konklusjon: høyden av et KdV-soliton er proporsjonal med hastigheten c, mens bredden er omvendt proporsjonal med $\sqrt{c}$.
Disse sammenhengene kan forøvrig leses ut av ligningene (1) og (2). Når $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$, så må $D = E = 0$. Der hvor funksjonen $\phi(x)$ har sin ekstremalverdi ϕ_e, enten et maksimum eller et minimum, må $\phi' = 0$, og ligning (2) gir da at

$$-\frac{c}{2}\,{\phi_\mathrm{e}}^2 - {\phi_\mathrm{e}}^3 = 0 \ .$$

Hvis ekstremalverdien ikke er null, slik at solitonet er helt fraværende, så må den være

$$\phi_\mathrm{e} = -\frac{c}{2} \ .$$

I ekstremalpunktet er da, i følge ligning (1),

$$-c\phi_\mathrm{e} - 3{\phi_\mathrm{e}}^2 + \phi'' = 0 \ ,$$

som gir at

$$\phi'' = c\phi_\mathrm{e} + 3{\phi_\mathrm{e}}^2 = \frac{c^2}{4} \ .$$

Hvis vi sammenligner to funksjoner $f(x)$ og $g(x) = af(bx)$, der a og b er konstanter, så har vi at $g''(x) = ab^2 f''(bx)$. Høyden av g er a ganger høyden av f, mens bredden av g er $1/b$ ganger bredden av f. Av de to opplysningene at ϕ_e er proporsjonal med c og at ϕ'' i ekstremalpunktet er proporsjonal med c^2, kan vi derfor trekke samme konklusjon som før, nemlig at bredden av et KdV-soliton er omvendt proporsjonal med $\sqrt{c}$.

3d) Egenverdiligningen for operatoren L er

$$L\psi = \lambda\psi \ ,$$

der $\psi = \psi(x,t)$, og der $\lambda = \lambda(t)$ er en egenverdi, som i prinsippet kan variere med tiden t. Det følger av KdV-ligningen, skrevet på formen $u_t + [L,A] = 0$, at dersom tidsavhengigheten til Schrödinger-bølgefunksjonen ψ er gitt av ligningen

$$\psi_t = A\psi \ ,$$

så er egenverdien λ uavhengig av t. For å bevise det, tidsderiverer vi egenverdiligningen, det gir:

$$u_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t \ ,$$

eller:

$$\lambda_t\psi = u_t\psi + L\psi_t - \lambda\psi_t = u_t\psi + LA\psi - \lambda A\psi = (u_t + LA - AL)\psi = 0 \ .$$

Siden ψ er en egenfunksjon for L, er den pr. definisjon ikke identisk lik null, og derfor følger det at $\lambda_t = 0$.

3e) Vi skal vise at $\dot{N} = 0$. Utregningen er ganske rett fram:

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \psi\,\psi_t = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \psi\,(A\psi) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \psi\,(-4\psi_{xxx} + 6u\,\psi_x + 3u_x\,\psi) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ (-8\psi\,\psi_{xxx} + 6u\,\psi\,\psi_x + 3u_x\,\psi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ (-8\psi\,\psi_{xx} + 4(\psi_x)^2 + 3u\,\psi^2)_x \\
&= (-8\psi\,\psi_{xx} + 4(\psi_x)^2 + 3u\,\psi^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

De forutsetningene vi gjør, er at funksjonene u og ψ, og alle aktuelle deriverte av dem, går mot null "tilstrekkelig raskt" i begge grensene $x \to \pm\infty$.
At normeringsintegralet er tidsuavhengig, har betydning når vi bruker invers-spredning-metoden til å beregne tidsutviklingen av funksjonen $u(x,t)$, i følge KdV-ligningen, gitt startprofilen $u(x,0)$. Da bruker vi nemlig ligningen $\psi_t = A\psi$ til å finne tidsutviklingen av koeffisienten $a_\kappa(t)$, definert ved at $\psi(x,t) \to a_\kappa(t)\,\mathrm{e}^{-\kappa x}$ når $x \to \infty$, for en bundet tilstand ψ med egenverdi $\lambda = -\kappa^2$. Det er en viktig forutsetning i denne definisjonen at ψ til enhver tid er normert slik at $N = 1$.